Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 30.01.2015

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	9	9	10	4	32
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Gegeben ist das in Abbildung 1 dargestellte mechanische System. Eine zum Zeitpunkt t_0 mit der Geschwindigkeit v_0 sinkende Last L (Masse m) an einer Seiltrommel S (Trägheitsmoment J) wird mithilfe des Balkens B (Dichte ρ), welcher an der Stelle K einen Kontakt mit der Trommel S (Gleitreibungskoeffizient μ) besitzt, auf dem Sinkweg mit der Länge s zum Stillstand gebracht. Der Balken B ist in A und die Seiltrommel S in C drehbar gelagert. Es soll die zur Abbremsung notwendige, zeitlich konstante Kraft F unter Berücksichtigung des Eigengewichts des Balkens B berechnet werden. Der Radius r der Seiltrommel kann als konstant und das Seil als masselos angenommen werden. Die Reibung in den Gelenken A und C kann vernachlässigt werden. Betrachten Sie die folgenden Größen als gegeben: $v_0, m, \rho, \mu, b_1, b_2, h, l_1, l_2, l_3, r, R, J, s, x_s, y_s, z_s$.

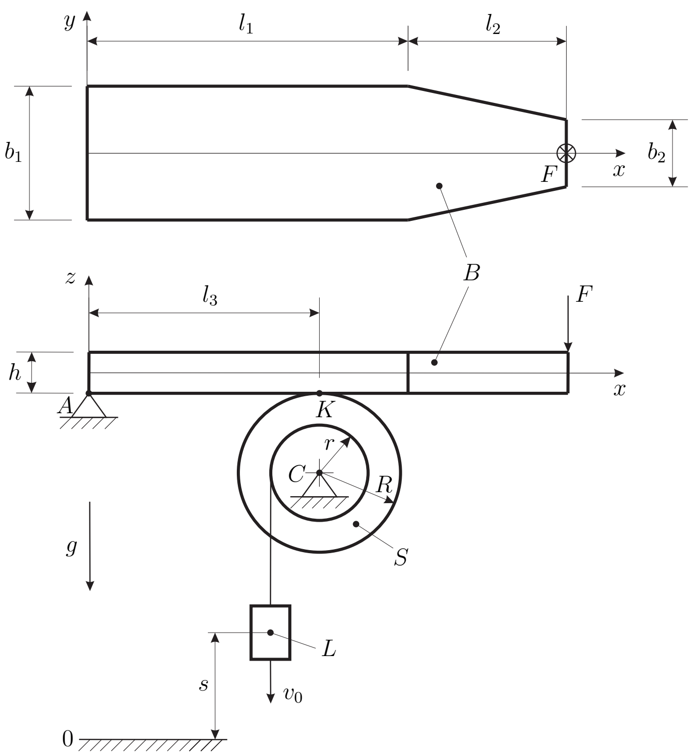

Abbildung 1: Seiltrommel mit Bremse.

a) Berechnen Sie die Gewichtskraft $F_g = m_B g$ des Balkens. 1 P.|

b) Bestimmen Sie die potentielle Energie V und die kinetische Energie T der Last und der Seiltrommel zum Zeitpunkt t_0. Nehmen Sie als Bezugspunkt für die potentielle Energie das Niveau 0 an. 2 P.|

c) Berechnen Sie das Reibmoment M_r, welches auf die Seiltrommel wirkt, als Funktion der Kraft F. Setzen Sie hierbei nicht das Ergebnis aus 1a ein, sondern verwenden Sie das Symbol F_g. Nehmen Sie die Lage des Schwerpunkts (x_s, y_s, z_s) des Balkens als bekannt an. 2 P.|

d) Bestimmen Sie die Arbeit des dissipativen Moments M_r als Funktion der Kraft F, welche während des Abbremsvorgangs in Wärme umgewandelt wird. 1 P.|

e) Berechnen Sie die zeitlich konstante Kraft F, welche die Last L mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 innerhalb der Wegstrecke s zum Stillstand bringt.
Hinweis: Die Kraft F kann unter anderem mithilfe der Ergebnisse aus 1b und 1d errechnet werden. 3 P.|

Lösung:

a)

$$m_B = \rho h \left(l_1 b_1 + l_2 \frac{b_1 + b_2}{2} \right)$$
$$F_g = m_B g$$

b)

$$V = mgs$$
$$T_L = \frac{m v_0^2}{2}$$
$$T_S = \frac{J v_0^2}{2r^2}$$
$$T = T_L + T_S$$

c) Summe der Momente um den Drehpunkt A ist null

$$\sum M_A = 0 : F_g x_s + F(l_1 + l_2) - F_N l_3 = 0$$

$$F_r = F_N \mu$$
$$M_r = F_r R$$

d) Das Bremsmoment ist konstant -> Die Arbeit ist das Moment mal dem zurückgelegten Winkel der Seiltrommel während des Abbremsvorgangs

$$W = M_r \frac{s}{r}$$

e) Am Ende des Bremsvorganges ist die kinetische und die potentielle Energie null -> gesamte Energie muss durch die Reibung in Wärme umgewandelt worden sein

$$W = T + V$$
$$F = \frac{l_3 r}{s \mu R (l_1 + l_2)} (T + V) - \frac{x_s}{l_1 + l_2} F_g$$

2. Ein Balken B (stückweise quaderförmig, konstante Dicke d und homogene Dichte ρ, Trägheitsmoment J_B) ist, wie in Abbildung 2 dargestellt, im Gelenk A auf einem Schlitten S (Masse m_s) drehbar gelagert. Im Lager A tritt viskose Reibung (geschwindigkeitsproportional) mit dem konstanten Reibungsparameter $d_2 > 0$ auf. Zwischen Balken B und Schlitten S wirkt eine Drehfeder deren Moment linear mit der Auslenkung ϕ des Balkens ansteigt (Federkonstante $c_2 > 0$). Der Schlitten S ist auf der Schlittenführung SF gelagert, welche nur einen translatorischen Freiheitsgrad in Richtung s zulässt. In der Schlittenlagerung tritt eine geschwindigkeitsproportionale Reibung mit dem konstanten Reibungsparameter $d_1 > 0$ auf. Zwischen Schlitten S und dem Boden befindet sich eine lineare Feder mit der konstanten Federsteifigkeit $c_1 > 0$. Auf dem Balken greift eine externe Kraft F an, welche stets orthogonal auf den Balken steht. In Abbildung 2 ist das System mit entspannten Federn dargestellt ($s = s_{10}, \phi = 0$).
Betrachten Sie die folgenden Größen als gegeben:
$m_s, \rho, J_B, b_1, b_2, b_3, d, l_1, l_2, l_3, c_1, s_{10}, c_2, d_1, d_2, F$.

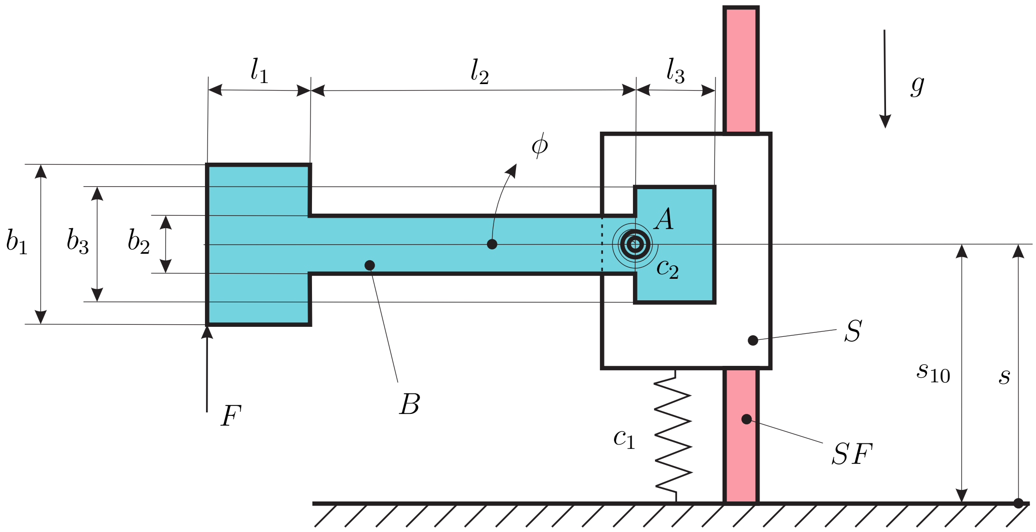

Abbildung 2: Starrkörpersystem.

a) Berechnen Sie die Masse m_B des Balkens B und den Abstand des Schwerpunktes des Balkens B von der Gelenkachse A. 2.0 P.|

b) Ermitteln Sie die potentielle Energie des obigen Systems als Funktion der generalisierten Koordinaten $\boldsymbol{q}^T = [s, \phi]$. Setzen Sie hierbei nicht das Ergebnis aus 2a ein, sondern verwenden Sie für die Masse des Balkens das Symbol m_B und für den Abstand des Schwerpunktes zur Gelenkachse A das Symbol l_s. 2.0 P.|

c) Berechnen Sie die kinetische Energie des obigen Systems. Das Trägheitsmoment J_B des Balkens B um eine zur Gelenkachse A parallele und durch den Schwerpunkt gehenden Achse ist gegeben. 2.0 P.|

d) Ermitteln Sie die generalisierten Kräfte, welche sich aus den externen und den dissipativen Kräften zusammensetzen. 1.5 P.|

e) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion und die Euler-Lagrange Gleichungen an. Geben Sie einen Zustandsvektor $\boldsymbol{x}$ des Systems an. 1.5 P.|
Hinweis: Die Differentiation muss nicht durchgeführt werden.

Lösung:

a)

$$m_B = \rho d(b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3)$$
$$l_s = \frac{b_1 l_1 \left(\frac{l_1}{2} + l_2\right) + \frac{b_2 l_2^2}{2} - \frac{b_3 l_3^2}{2}}{b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3}$$

b)

$$\begin{aligned} V_B &= g m_B (s + l_s \sin\phi) \\ V_S &= g m_s s \\ V_{c1} &= \frac{1}{2} c_1 (s - s_{10})^2 \\ V_{c2} &= \frac{1}{2} c_2 \phi^2 \\ V &= V_B + V_S + V_{c1} + V_{c2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} T_S &= \frac{1}{2} m_s \dot{s}^2 \\ T_{B,r} &= \frac{1}{2} J_B \dot{\phi}^2 \\ r_{bs} &= \begin{bmatrix} -l_s \cos\phi \\ s + l_s \sin\phi \end{bmatrix} \\ T_{B,t} &= \frac{1}{2} m_B \dot{r_{bs}}^T \dot{r_{bs}} \\ &= \frac{1}{2} m_B \left(\dot{\phi}^2 l_s^2 + \dot{s}^2 + 2 l_s \dot{\phi} \dot{s} \cos\phi \right) \\ T &= T_S + T_{B,r} + T_{B,t} \end{aligned}$$

d)

$$\mathbf{r}_F = \begin{bmatrix} -(l_1 + l_2)\cos\phi - \frac{b_1}{2}\sin\phi \\ s + (l_1 + l_2)\sin\phi - \frac{b_1}{2}\cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F\sin\phi \\ F\cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\tau_{e,s} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_F}{\partial s}\right)^T \mathbf{F} = F\cos\phi$$

$$\tau_{e,\phi} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_F}{\partial \phi}\right)^T \mathbf{F} = F(l_1 + l_2)$$

$$\tau_{d,s} = -d_1 \dot{s}$$

$$\tau_{d,\phi} = -d_2 \dot{\phi}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{e,s} + \tau_{d,s} \\ \tau_{e,\phi} + \tau_{d,\phi} \end{bmatrix}$$

e)

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad mit\, q_1 = s\ und\, q_2 = \phi$$

Ein möglicher Zustandsvektor lautet:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

3. Der in Abbildung 3 dargestellte Behälter mit der Breite b und Höhe h hat eine mit Luft gefüllte, abgedichtete Kammer, die von der rechten Kammer des Behälters durch einen in x-Richtung beweglichen Kolben getrennt ist. Die Luft kann als ideales Gas mit dem Adiabatenexponenten κ angenommen werden. Die Kolbenstange weist den Durchmesser d auf. Zum Zeitpunkt τ_0 befindet sich der Kolben an der Position x_0 und in beiden Kammern ist Luft mit dem Umgebungsdruck p_0, der Dichte ρ_0 und der Temperatur T_0. Danach wird durch die Öffnung der Länge c in die rechte Kammer Öl mit der Dichte ρ_f bis zur Höhe z_1 gefüllt. Die Luft in der rechten Kammer kann dabei durch die Öffnung entweichen. Aufgrund des hydrostatischen Drucks ergibt sich ein von der z-Koordinate abhängiger Druck $p_f(z)$ im Öl. Der Druck p_1 in der mit Luft gefüllten Kammer kann hingegen als homogen angenommen werden.
Betrachten Sie die folgenden Größen als gegeben: h, b, d, c, p_0, ρ_0, T_0, κ, g, ρ_f, x_0, z_1

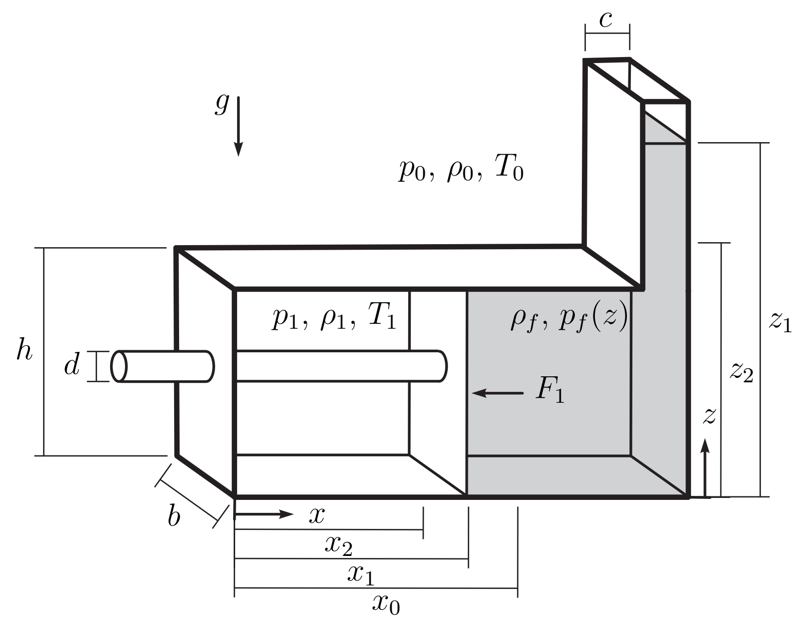

Abbildung 3: Hydraulischer Behälter zum Zeitpunkt τ_1.

a) Betrachten Sie den Zeitpunkt τ_1 unmittelbar nach der Füllung (dargestellt in Abbildung 3). Es kann angenommen werden, dass zu diesem Zeitpunkt noch keine Wärmeübertragung zwischen der Luft in der linken Kammer und der Umgebung stattgefunden hat. Berechnen Sie die Kraft F_1 auf den Kolben zum Zeitpunkt τ_1. 3 P.|
Hinweis: Setzen Sie die Bernoulli Gleichung an, um $p_f(z)$ auszudrücken.

b) Berechnen Sie die Temperatur T_1 der Luft in der linken Kammer und die Kolbenposition x_1 zum Zeitpunkt τ_1. 3 P.|

c) Betrachten Sie nun den Zeitpunkt τ_2, wenn die Luft wieder auf die Umgebungstemperatur T_0 abgekühlt ist. Berechnen Sie die Kolbenposition x_2 zum Zeitpunkt τ_2. Nehmen Sie an, dass für die Pegelhöhe $z_2 > h$ gilt. 4 P.|
Hinweis: Sie erhalten eine quadratische Gleichung für x_2 in der Form $a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = 0$. Geben Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 an.

Lösung:

a)

$$F_1 = bh\left(p_0 + \rho_f g\left(z_1 - \frac{h}{2}\right)\right)$$

b)

$$T_1 = T_0\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}$$

$$x_1 = x_0\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

mit

$$p_1 = \frac{F_1 - F_k}{bh - \frac{d^2}{4}\pi}$$
$$F_k = \frac{d^2}{4}\pi p_0$$

c)

$$a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = 0$$

mit

$$a_2 = \frac{\rho_f g T_1 b h^2}{c}$$
$$a_1 = T_1 p_0 bh - \frac{\rho_f g T_1 b h^2}{2} - T_1 F_k + \rho_f g T_1 b h z_1 - \frac{\rho_f g T_1 b h^2 x_1}{c}$$
$$a_0 = -T_2 p_1\left(bh - \frac{d^2}{4}\pi\right)x_1$$

4. Ein Tank mit dem Volumen V ist vollständig mit einer Flüssigkeit gefüllt, welche die homogene Dichte ρ und Wärmekapazität c_p aufweist. Diese wird mit einer im ideal isolierten Boden eingelassenen Heizplatte erwärmt, die durch eine geeignete Temperaturregelung auf der konstanten Temperatur T_p gehalten wird, siehe Abbildung 4. Zwischen der Heizplatte und der Flüssigkeit wird Wärme über eine Trennschicht ausgetauscht, die über ihre gesamte Dicke L_p die Wärmeleitfähigkeit λ besitzt und die Wärmeübergangskoeffizienten α_p an der Kontaktfläche A_p zur Heizplatte und α_f an der Kontaktfläche zur Flüssigkeit aufweist. Außerdem wird durch die Hülle des Tanks Wärme zwischen der Flüssigkeit und der umgebenden Luft ausgetauscht, welche die feste Temperatur T_∞ hat. Die Hülle hat über die gesamte Dicke L_h die Wärmeleitfähigkeit λ und besitzt an der Kontaktfläche A_h zur Luft den Wärmeübergangskoeffizient α_h und den Wärmeübergangskoeffizient α_f an der Kontaktfläche zur Flüssigkeit. Es kann angenommen werden, dass die Oberfläche an der Innenseite und Außenseite der Hülle gleich groß ist.
   Betrachten Sie folgende Größen als gegeben: T_∞, T_p, V, ρ, c_p, α_f, α_a, α_p, λ, A_p, A_h, L_h, L_p

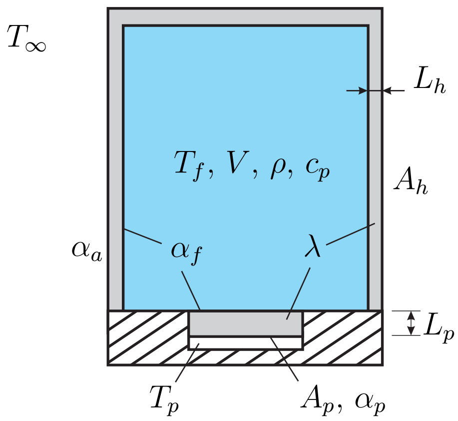

Abbildung 4: Beheizter Tank.

   a) Geben Sie die Differentialgleichung für die Temperatur der Flüssigkeit $T_f(t)$ an. Nehmen Sie eine homogene Temperatur $T_f(t)$ und eine stationäre Wärmeübertragung in der Hülle und der Trennschicht zur Heizplatte an. 4 P.

Lösung:

$$V\rho c_p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_f(t) = A_p k_p \left(T_p - T_f\left(t\right)\right) - A_h k_h \left(T_f\left(t\right) - T_\infty\right)$$

mit

$$k_h = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_f} + \frac{L_h}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}} \quad und \quad k_p = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_p} + \frac{L_p}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_f}}$$