AUTOMATION & CONTROL INSTITUTE
INSTITUT FÜR AUTOMATISIERUNGS-
& REGELUNGSTECHNIK

Univ.Prof. Dr.sc.techn. Georg Schitter

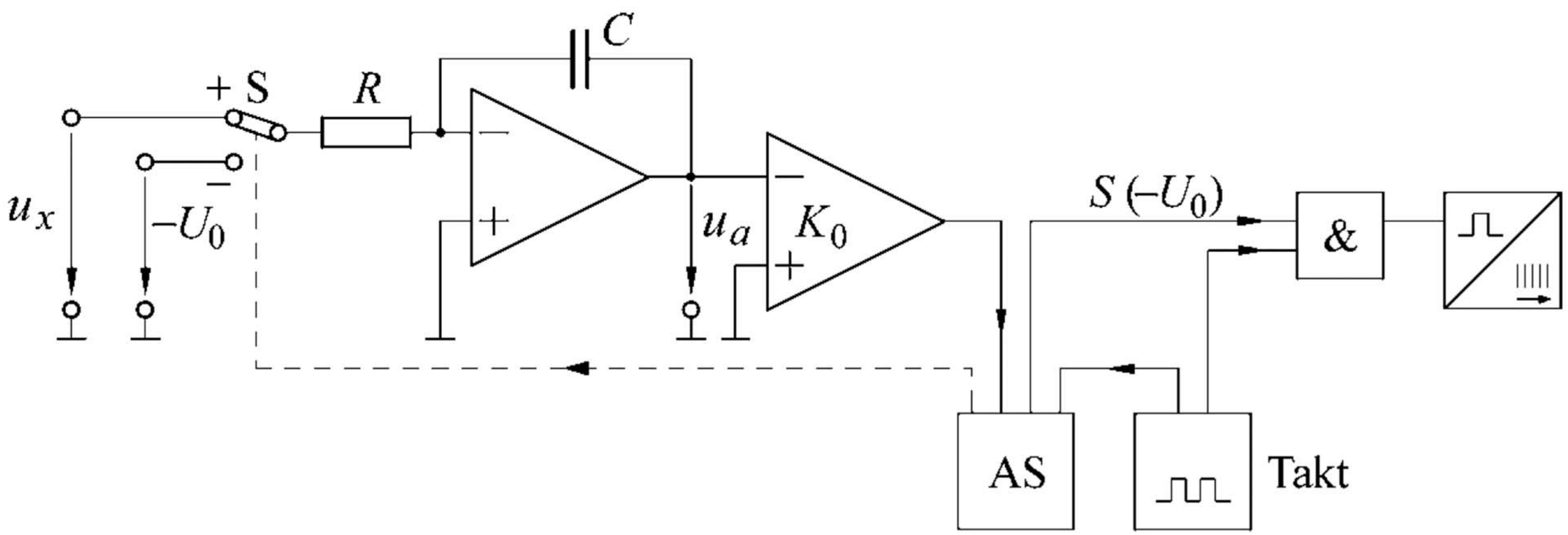
schitter@acin.tuwien.ac.at

Lösungen zu Rechenübung 6
A/D, D/A Wandlung, Oszilloskop

Messtechnik, VU 376.045 (3 SWS, 4 ECTS)
Sommersemester 2014

Beispiel 1: Dual Slope Konverter

- Ein 8-bit Duals Slope Konverter bildet die Ausgangsspannung eines Sensors (±5 V) digital ab.
- Um Aliasing zu vermeiden soll ein RC-Tiefpass 1-ter Ordnung dimensioniert werden.
- Die maximale auftretende Signalfrequenz f_{sens} beträgt 300 Hz.



Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 1: Dual Slope Konverter

(a) Berechnen Sie die Auflösung des ADCs (U_{LSB})

$$U_{LSB} = \frac{2 \cdot \widehat{U_S}}{2^n} = 39.1[\text{mV}] \qquad \text{mit } \widehat{U_S} = 5\text{V}$$

(b) Geben Sie die zu erwartende Rauschspannung (U_{Rausch}) an

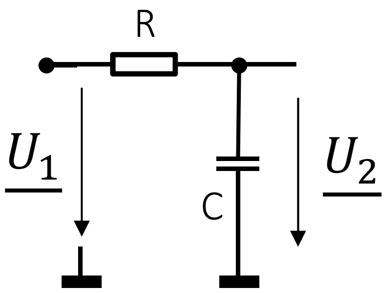
$$U_{Rausch} = \frac{U_{LSB}}{\sqrt{12}} = 11.3[\text{mV}]$$

(c) Dimensionieren Sie den Antialiasing-Filter (RC-Tiefpass 1-ter Ordnung), sodass die -3dB Grenzfrequenz des Filters der Signalfrequenz f_{sens} entspricht. Berechnen Sie die zugehörige Zeitkonstante τ des Filters.
Um Signaldämpfung und Phasendrehung zu reduzieren wird die Grenzfrequenz um eine Dekade erhöht. Was bedeutet dies für die Abtastfrequenz?

Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 1: Dual Slope Konverter

RC Tiefpass 1ter-Ordnung:



$$G(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega \underbrace{RC}_{\tau}}$$

-3dB wird an der Grenzfrequenz f_g erreicht ($f_g = f_{sens}$), wobei f_g die Polstelle der Übertragungsfunktion ist:

aus $1 + j2\pi f_g RC = 0$ folgt $\tau = \frac{1}{2\pi f_{sens}} = 0.53[\mathrm{ms}]$

Die Abtastfrequenz kann nun unter der Annahme bestimmt werden, eine bestimmte Dämpfung bei der Nyquist-Frequenz zu erreichen:

z.B. $D(\omega) = |G(j\omega)| = -20$[dB] ➔ $f_{Nyquist} = f_{sens} \cdot 10 =$3[kHz]

Es wäre dann eine Abtastfrequenz von > 6kHz zu wählen

(d) Berechnen Sie die Frequenz, mit der sie abtasten müssen, damit der Abtastfehler stets kleiner als 1 U_{LSB} ist („Echtzeit Signalabtastung").

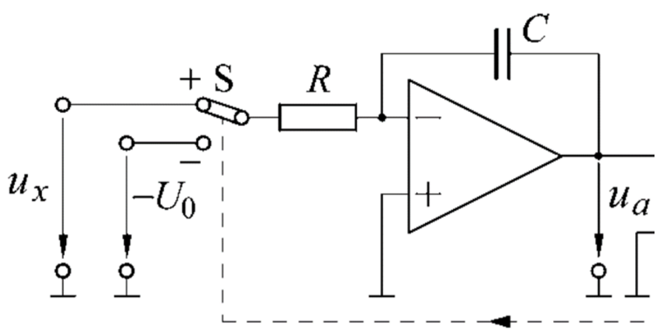
$$f_A = f_{sens} \cdot \pi \cdot 2^{n+1} = 482.6\ [kHz]$$

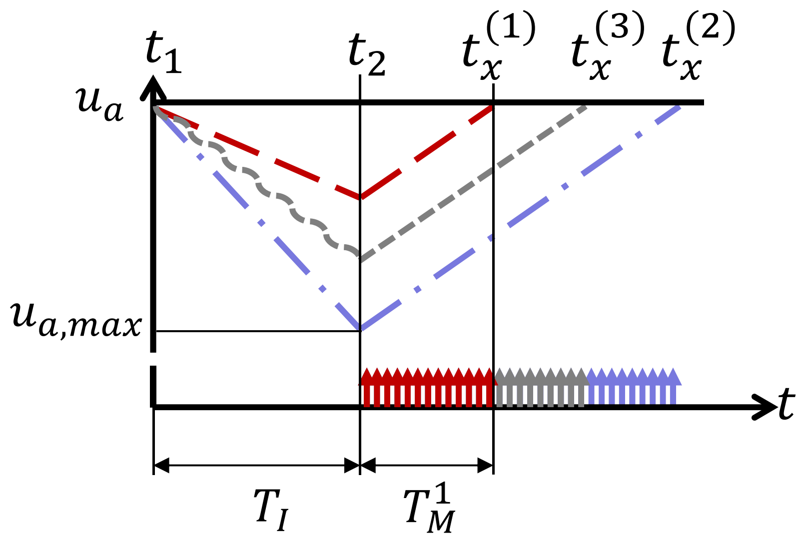
Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 1: Dual Slope Konverter

(e) Berechnen Sie die Integrationszeit T_I (t_2-t_1) und die Messzeit T_M (t_x-t_2) der Dual-Slope Schaltung unter Berücksichtigung folgender Angaben:

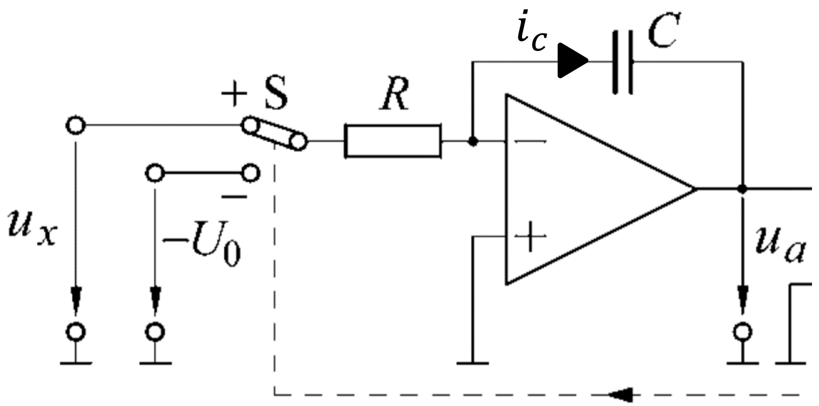
- U_0 = 5V, R= 2kΩ, Wandlungszeit T_A (t_x-t_1) = 10µs, maximaler Kondensatorstrom i_c=5mA
- u_x wird mit einer Offsetspannung auf den Bereich 0-10V angehoben





Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 1: Dual Slope Konverter



$$u_C = \frac{1}{C}\int_{t_1}^{t_2} i_c\, dt$$

Zeitintervall t_1-t_2: $\quad i_c = \frac{u_x}{R}, \quad u_a = -u_c, \quad \overline{u_x} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} u_x\, dt$

$$u_a(t_2) = -\frac{1}{RC}\overline{u_x}\,(t_2 - t_1) = -\frac{1}{RC}\overline{u_x}\, T_I$$

Zeitintervall t_x-t_2: $\quad i_c = \frac{-U_0}{R}, \quad u_a = -u_c$

$$u_a(t_x) = u_a(t_2) + \frac{1}{RC}\int_{t_2}^{t_x} -U_0\, dt = u_a(t_2) + \frac{1}{RC}\, U_0\, T_M = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_A = T_I + T_M = u_a\left(\frac{1}{u_x} + \frac{1}{U_0}\right) RC \quad \Rightarrow \quad RC = \frac{T_A}{u_a}\,\frac{U_0\, u_x}{U_0 + u_x}$$

Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 1: Dual Slope Konverter

Integrationszeit: $$T_I = T_A \frac{U_0}{U_0 + u_x} = 10^{-7} \frac{5}{5+10} = 3.3[\mu s]$$

Messzeit: $$T_M = T_A \frac{u_x}{U_0 + u_x} = 10^{-7} \frac{10}{5+10} = 6.7[\mu s]$$

(f) Wie groß muss die interne Pulsfrequenz f_{Takt} sein, damit jedes Bit mit mindestens einem Puls abgebildet wird?

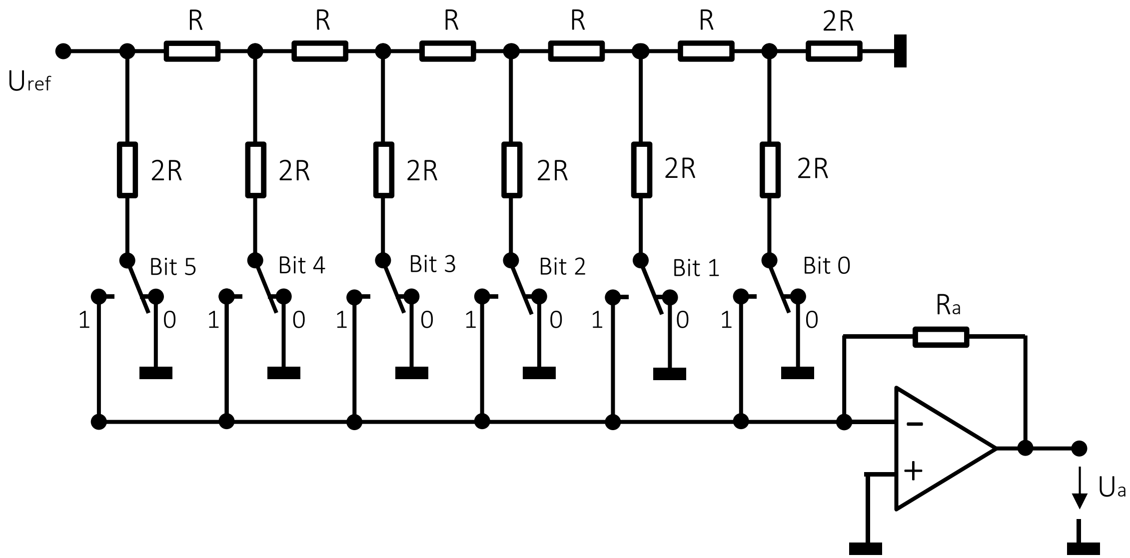
pro Bit wird ein Takt benötigt: $$f_{Takt} = \frac{2^n - 1}{T_M} = 38.06[MHz]$$

(g) Der Komparator sei ideal bis auf eine Schaltzeit $t_k = 10ns$. Welcher Art ist die dadurch entstehende Abweichung von der Sollcharakteristik? Berechnen sie den relativen Fehler bei $u_x = 2.5V$.

Es entsteht dadurch kein relativer Fehler, weil die Messzeit nicht beeinflusst wird.

Beispiel 2: R-2R DAC

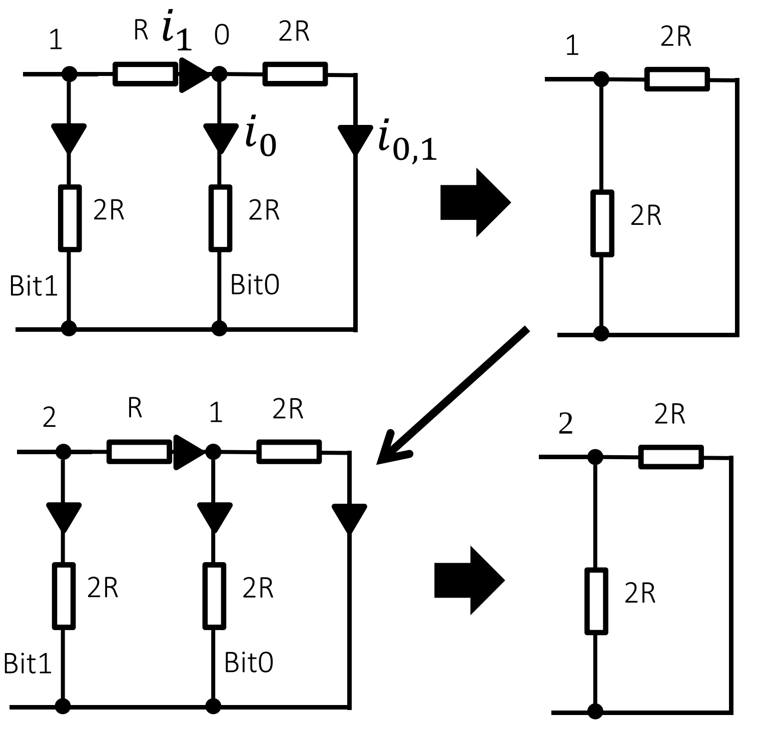
- Gegeben ist ein DAC nach dem Wägeverfahren mit folgenden Parametern: U_{ref} = 5 V, R = 1 kΩ



Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 2: R-2R DAC

(a) Berechnen Sie den Strom i_{ges} mit der die Spannungsquelle konstant belastet wird. Wie groß sind die Teilströme durch jeden Schalter? Wie groß ist R_a, wenn der maximale Betrag von U_a gleich 10 V ist?



$$i_0 = \frac{i_1}{2},\ i_1 = \frac{i_2}{2}, \ldots\ldots\ i_5 = \frac{i_{ges}}{2}$$

<u>Berechnung Gesamtwiderstand</u>

Knoten 0: 2R||2R => R
Knoten 1: 2R|| (R+R)
usw.…

$$R_{ges} = R$$

$$i_{ges} = \frac{U_{ref}}{R} = 5[\mathrm{mA}]$$

<u>Berechnung Teilströme</u>

Aus Stromteilerregler folgt:

$$i_0 = i_1 \cdot \frac{R}{2R} \qquad \text{und} \qquad i_0 = i_{0,1}$$

Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 2: R-2R DAC

Daraus lässt sich folgende Umsatzgleichung ableiten:

$$U_a = -i_{ges}\left(\frac{B_5}{2}+\frac{B_4}{4}+\cdots+\frac{B_1}{32}+\frac{B_0}{64}\right)R_a \qquad \text{mit } B_i = \{0|1\}$$

Oder allgemein: $$U_a = -U_{ref}\frac{R_a}{R}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{B_i}{2^{n-i}}$$

Auslegung von R_a: $$R_a = \frac{U_a}{U_{ref}}\cdot\frac{R}{\sum_{i=0}^{5}\frac{B_i}{2^{n-i}}} = 2.03\cdot R$$

(b) Geben Sie für die anliegende Eingangskombination Bit5=0; Bit4=1; Bit3=1; Bit2=0; Bit1=0; Bit0=1 die Spannung U_a am Ausgang des OPVs an.

Einsetzen in die allgemeine Gleichung liefert:

$$U_a = -U_{ref}\cdot 2.03\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{64}\right) = -3.96[V]$$

Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 2: R-2R DAC

(c) Berechnen Sie die maximale Fehlerspannung ΔU_a die in einem Temperaturbereich von -30°C bis 80°C auftritt und geben Sie die Temperatur und die Schalterkombination an, bei der diese auftritt:

- Temperaturänderung von R:
  $R(T) = R(20°C) \cdot [1 + \alpha \cdot (T - 20°C)]$ mit $\alpha = 5 \cdot 10^{-4}\ 1/°C$
- Temperaturänderung von U_{ref}:
  $U_{ref}(T) = 5V \cdot [1 + \beta \cdot (T - 20°C)]$ mit $\beta = 2 \cdot 10^{-5}\ 1/°C$

Die größte Temperaturänderung tritt bei 80° auf, wenn alle Schalter dabei geschlossen sind. Widerstände sind thermisch gekoppelt und besitzen gleiche Temperaturänderung.

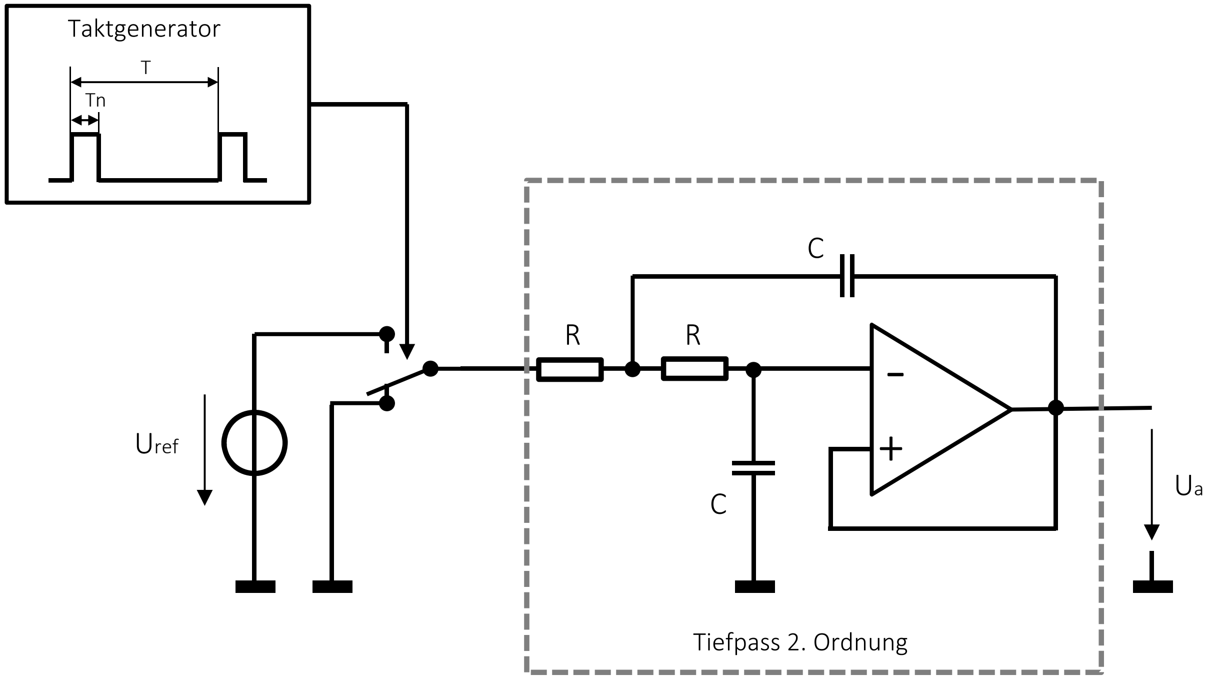
Für alle Schalter geschlossen: $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{B_i}{2^{n-i}} = \frac{63}{64}$

$$\Delta U_a = -(U_{ref}(80°) - U_{ref}(20°)) \cdot 2.03 \cdot \frac{63}{64} = -11.99[\text{mV}]$$

Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 3: Tastverhältnis DAC

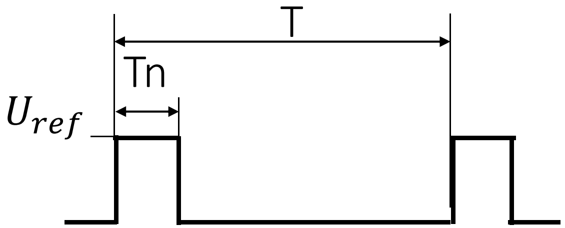
- Die gepulste Referenzspannung (U_{ref}=5 V) wird über einen Sallen-Key Filter (Tiefpass-Filter) 2-ter Ordnung geglättet. Die Periodendauer T der Pulse beträgt 1ms, es soll ein 8bit DAC realisiert werden.



Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 3: Tastverhältnis DAC

(a) Wie groß muss die Referenzspannung U_{ref} sein, wenn eine Ausgangsspannung von 5V erreicht werden soll?



$$U_{ref} = U_{A,max} = 5V$$

(b) Es wird ein Digitalwert von 0b10010000 vorgegeben. Berechnen Sie den Mittelwert von U_a?

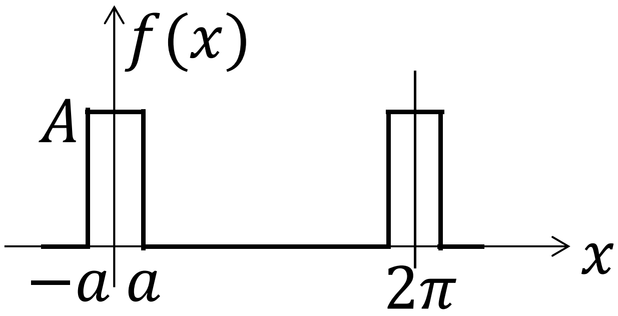
$$X = 0b10010000 = 2^7 + 2^4\Big|_{\text{dec}} = 144\Big|_{\text{dec}}$$

$$U_A = U_{ref}\frac{X}{2^n - 1} = 2.82[V] \text{ mit } n = 8 \text{ (Bit)}$$

Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

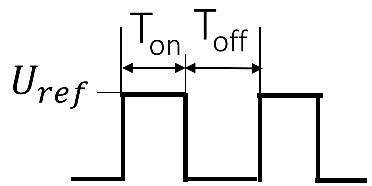
Beispiel 3: Tastverhältnis DAC

- Das Signal nach dem Schalter kann durch eine Fourier-Reihen-entwicklung folgend beschrieben werden:



$$f(x) = \frac{A \cdot a}{\pi} + \frac{2 \cdot A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot a)}{n} \cos(n \cdot x)$$

(c) Wie groß ist die maximale Amplitude U_1 der ersten Grundwelle von f(x) und bei welchem Tastverhältnis tritt diese auf?



Erste Grundwelle: $f_1(x) = \underbrace{\frac{2 \cdot A}{\pi} \sin(a)}_{U_1} \cos(x)$

ist maximal bei: $\sin(a) = 1 \Rightarrow a = \pi/2$

Tastverhältnis: $T_V = \frac{T_{on}}{T_{off}} = 1$ und $U_{1,max} = \frac{2 \cdot U_{ref}}{\pi}$

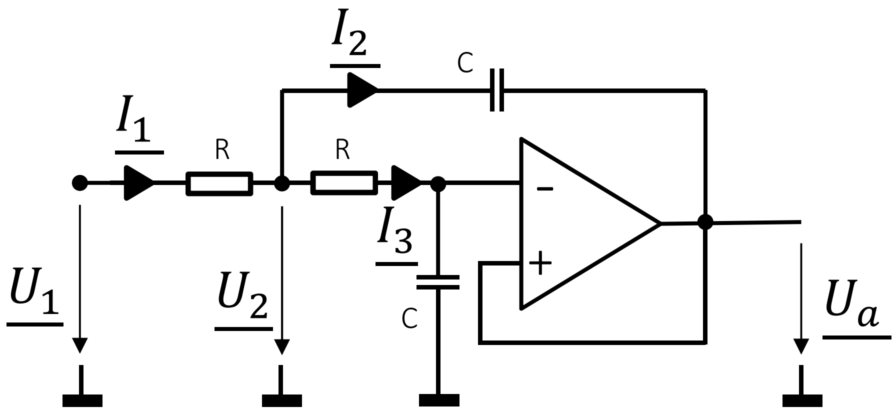
Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 3: Tastverhältnis DAC

(d) Zur Glättung des Signals am Ausgang wird der Tiefpass 2-ter Ordnung verwendet. Berechnen sie den Dämpfungsfaktor in dB, der die Amplitude U_1 auf ein 1/10 LSB reduziert. Wie groß ist die Zeitkonstante $\tau = RC$ des Filters um dies zu gewährleisten?

Dämpfungsfaktor: $D(\omega_1) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{U_{LSB}/10}{U_{1,max}}\right)$ mit $U_{LSB} = \frac{U_{ref}}{2^n - 1}$

$$D(\omega_1) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{\pi}{(2^n - 1) \cdot 20}\right) = -64.2\ [dB]$$



$$\underline{I_1} - \underline{I_2} - \underline{I_3} = 0 \qquad \underline{X_C} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\text{I:} \quad \frac{\underline{U_1} - \underline{U_2}}{R} - \frac{\underline{U_2} - \underline{U_a}}{\underline{X_C}} - \frac{\underline{U_2} - \underline{U_a}}{R} = 0$$

$$\text{II:} \quad \underline{U_a} = \underline{U_2} \cdot \frac{\underline{X_C}}{R + \underline{X_C}}$$

für τ, gesucht $\underline{U_a}/\underline{U_1}$

Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 3: Tastverhältnis DAC

einsetzen von II in I ergibt: $\frac{\underline{U_a}}{\underline{U_1}} = \frac{1}{(1+j\omega RC)^2} = \frac{1}{(1+j\omega\tau)^2}$

$$\left|\frac{\underline{U_a}}{\underline{U_1}}\right| = \frac{1}{1+(\omega_1\tau)^2} = D(\omega_1) \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\sqrt{\frac{1}{D(\omega_1)}-1}}{2\pi/T_1} = 6.41[\mathrm{ms}]$$

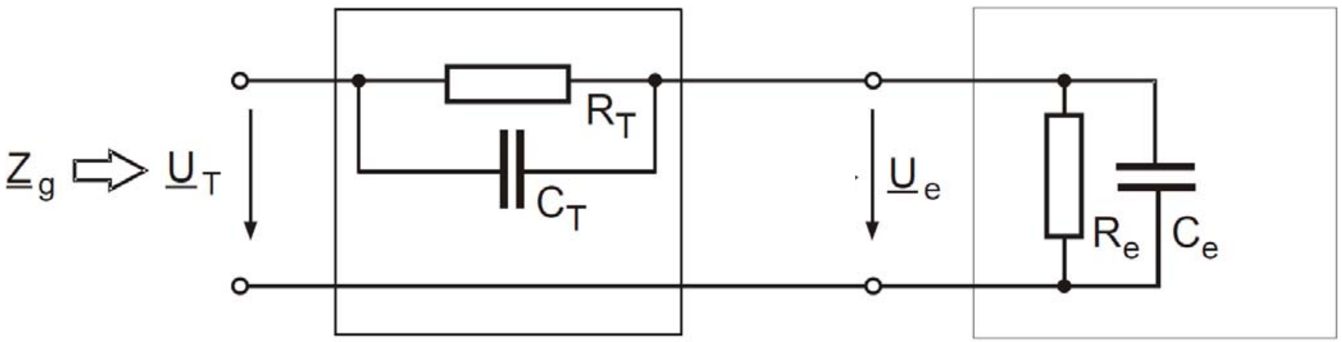
(e) Der Schalter besitzt unterschiedliche Ein- und Ausschaltzeiten. Überlegen sie, wie sich diese Differenz auf die Ausgangsspannung U_a auswirkt.

Schaltdifferenz Δt zwischen Ein- und Ausschaltverzögerung wirkt sich auf den zeitlichen Mittelwert aus:

$$\Delta U_a = U_{ref} \cdot \frac{\Delta t}{T}$$

Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 4: Frequenzkomp. Spg.-Teiler



a) Berechnen Sie allgemein den komplexen Spannungsteilerfaktor als Funktion der Frequenz

b) Abgleichbedingung für frequenzunabhängigen Teilerfaktor?

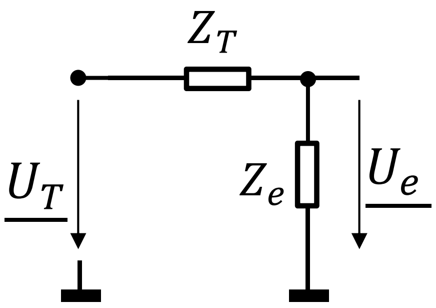
c) Wie groß ist der abgeglichene Teilerfaktor?

d) Wie groß ist der Eingangswiderstand?

Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 4: Frequenzkomp. Spg.-Teiler

(a) Berechnen Sie allgemein den komplexen Spannungsteilerfaktor als Funktion der Frequenz.



Ges.: $\underline{U_T}/\underline{U_e}$

Parallelschaltung von R_T und C_T:

$$Z_T = R_T||C_T = \frac{R_T \frac{1}{j\omega C_T}}{R_T + \frac{1}{j\omega C_T}}$$

Parallelschaltung von R_e und C_e:

$$Z_e = R_e||C_e = \ \dots = \frac{R_e}{1 + j2\pi f R_e C_e}$$

Spannungsteiler von Z_T und Z_e für Eingangsspannung U_T :

$$V = \frac{\underline{U_T}}{\underline{U_e}} = \frac{Z_e + Z_T}{Z_e} = \ \dots = 1 + \frac{R_T}{R_e}\frac{1 + j2\pi f R_e C_e}{1 + j2\pi f R_T C_T}$$

Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 4: Frequenzkomp. Spg.-Teiler

(b) Abgleichbedingung für frequenzunabhängigen Teilerfaktor?

$$V = \frac{\underline{U_T}}{\underline{U_e}} = 1 + \frac{R_T}{R_e} \frac{1 + j2\pi f R_e C_e}{1 + j2\pi f R_T C_T}$$

V frequenzunabhängig, wenn Bruch mit frequenzabhängigen Termen 1 wird!

$$V = \frac{U_T}{U_e} \longrightarrow 1 + j2\pi f R_e C_e = 1 + j2\pi f R_T C_T$$

Die Abgleichbedingung folgt damit zu:

$$R_e C_e = R_T C_T$$

Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 4: Frequenzkomp. Spg.-Teiler

(c) Wie groß ist der abgeglichene Teilerfaktor?

Abgleichbedingung einsetzen in komplexen Spannungsteiler

$$V = 1 + \frac{R_T}{R_e} \frac{1 + j2\pi f R_e C_e}{1 + j2\pi f R_T C_T}$$

liefert reellen Teilerfaktor mit

$$V_{kompensiert} = V_0 = 1 + \frac{R_T}{R_e}$$

Mit den Lösungen von b) und c) ergibt sich die Dimensionierung

$$R_T = R_e(V_0 - 1)$$

$$C_T = \frac{R_e}{R_T} C_e = C_e \frac{1}{(V_0 - 1)}$$

Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser

Beispiel 4: Frequenzkomp. Spg.-Teiler

(d) Wie groß ist der Eingangswiderstand?

Mit dem Eingangswiderstand

$$Z_g = Z_T + Z_e = \frac{R_T}{1 + j2\pi f R_T C_T} + \frac{R_e}{1 + j2\pi f R_e C_e}$$

und der Dimensionierung für den abgeglichenen Spannungsteiler von c) ergibt sich nach Rechnung

$$Z_g(V = V_0) = \frac{R_e V_0}{1 + j2\pi f R_e C_e}$$

bzw.

$$Z_g(V = V_0) = \frac{R_g}{1 + j2\pi f R_g C_g} = R_g || C_g \qquad \text{mit} \qquad R_g = V_0 R_e, \quad C_g = \frac{C_e}{V_0}$$

Basierend auf Schrüfer, E., et al., 2012, Elektrische Messtechnik, München: Hanser