1 Statische Optimierung ohne Beschränkungen

In dieser Übung soll das Minimum einer Kostenfunktion

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

bezüglich der Optimierungsvariablen $\mathbf{x}$ gefunden werden. Hierbei soll die *Newton*-Methode in MATLAB implementiert werden und anschließend anhand von zwei Testfunktionen mit den von der *Optimization Toolbox* zur Verfügung gestellten Algorithmen verglichen werden. Zur Vorbereitung für die Übung werden folgende Punkte empfohlen:

1. Machen Sie sich mit den MATLAB-Befehlen `meshgrid`, `plot3` und `fminunc` sowie mit *function handles* vertraut und testen Sie diese anhand einfacher Beispiele.
2. Lesen Sie die Theorie für die *Newton*-Methode sowie für Liniensuchverfahren durch.

Folgende Aufgaben sollen in der Übungseinheit gelöst werden:

1. Programmieren Sie eine Funktion `[fmin,xmin] = newton(x0)`, die mittels der *Newton*-Methode das Minimum einer Kostenfunktion ausgehend vom Startwert $\mathbf{x}_0$ berechnet. Der Wert der Kostenfunktion f, der Gradient $\mathbf{df}$ und die Hessematrix $\mathbf{ddf}$ an der Stelle $\mathbf{x}$ sollen in einer Hilfsfunktion `[f,df,ddf] = calcf(x)` berechnet werden. Implementieren Sie eine konstante Schrittweite $\alpha_k = 1$ und zeichnen Sie jeden Iterationsschritt in einem dreidimensionalen Plot ein.
2. Testen Sie Ihre Methode anhand der *Booth*–Funktion

   $$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2 - 7)^2 + (2x_1 + x_2 - 5)^2$$

   und der *Styblinski*–*Tang*–Funktion

   $$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i \right)$$

   für $n = 2$, siehe auch Abbildung 1.1.

   Starten Sie die Iterationen jeweils an den Punkten $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ bzw. $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 & 5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.
   - Konvergiert die Methode zu einem globalen Minimum?
   - Wieso werden ggf. je nach Startwert unterschiedliche Punkte erreicht?

- Wie kann das Konvergenzverhalten verbessert werden?

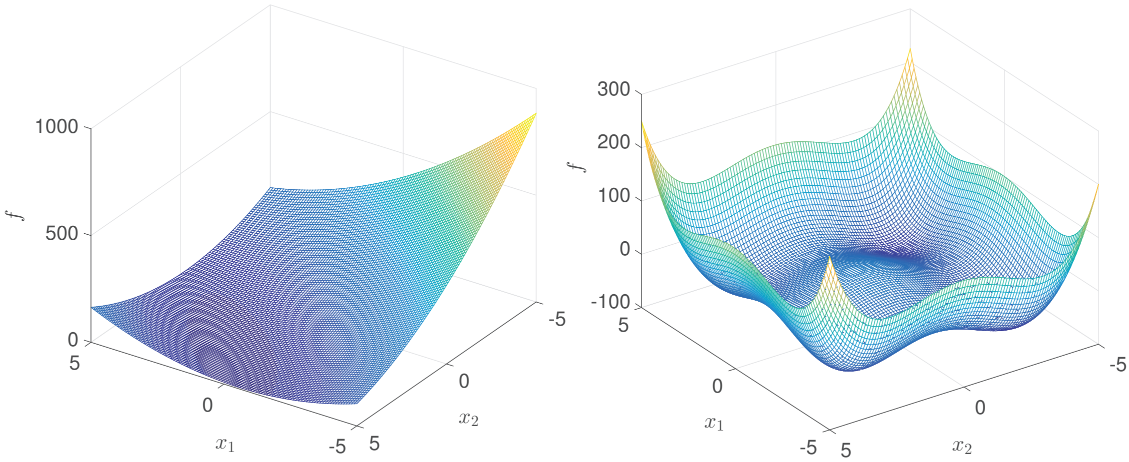

Abbildung 1.1: Booth-Funktion und Styblinski-Tang-Funktion.

Hinweis: Das globale Minimum befindet sich bei $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ für die Booth-Funktion und bei $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2.9 & -2.9 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ für die Styblinski-Tang-Funktion.

3. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der von MATLAB zur Verfügung gestellten Funktion `fminunc` unter Verwendung der *Methode der Vertrauensbereiche* (*Trust-Region Method*). Achten Sie auf eine korrekte Übergabe der Optionen, damit tatsächlich diese Methode verwendet wird. Benutzen Sie die in Punkt 1. programmierte Funktion `calcf(x)` als *function handle*.