Institut für Nachrichtentechnik
und Hochfrequenztechnik E389
1.5.2005 G. Doblinger

1. Beispiel:

Gruppe A

a) $p[n]$ tastet jeden vierten Wert von $x[n]$ aus, d.h. nur $\cos\frac{\pi}{4}4k = (-1)^k$ bestimmt die von null verschiedenen Ausgangssignalwerte:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta[n-4k]$$

bzw. im Grundintervall $n \in [0,7]$:

$$y[n] = \delta[n] - \delta[n-4]$$

Skizze trivial.

b) $N_y = 8$, $c_y[k] = \frac{1}{8}\left[1-(-1)^k\right], \quad k = 0, 1, \ldots, 7$

c) $E_y = \frac{1}{4}$

Gruppe B

a) Aus $x[n]$ jeden dritten Wert berechnen:

$$y[n] = 1.366 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta[n-3k]$$

bzw. im Grundintervall $n \in [0,5]$:

$$y[n] = 1.366\delta[n] - 1.366\delta[n-3]$$

b) $N_y = 6$, $c_y[k] = \frac{1.366}{6}\left[1-(-1)^k\right], \quad k = 0, 1, \ldots, 5$

c) $E_y = 0.622$

Gruppe C

a) $p[n]$ tastet jeden vierten Wert von $x[n]$ aus, jedoch zeitverzögert um ein Abtastintervall:

$$y[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta[n-4k-1]$$

bzw. im Grundintervall $n \in [0,7]$:

$$y[n] = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta[n-1] - \frac{1}{\sqrt{2}}\delta[n-5]$$

b) $N_y = 8$, $c_y[k] = \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-j\frac{\pi}{4}k}\left[1-(-1)^k\right], \quad k = 0, 1, \ldots, 7$

c) $E_y = \frac{1}{8}$

2. Beispiel:

Gruppe A

a) $h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$

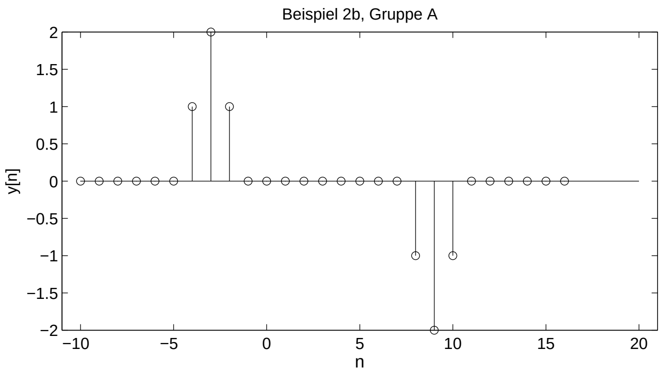
Reihenfolge von h_1 und h_2 vertauschen!

$(h_2 * h_2)[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] = h_3[n]$

$h_{ges}[n] = h_3[n] - h_3[n-4] = (h_1 * h_3)[n]$

$\Rightarrow h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-4]$, Skizze trivial

b) $y[n] = h_3[n+4] - h_3[n-8]$



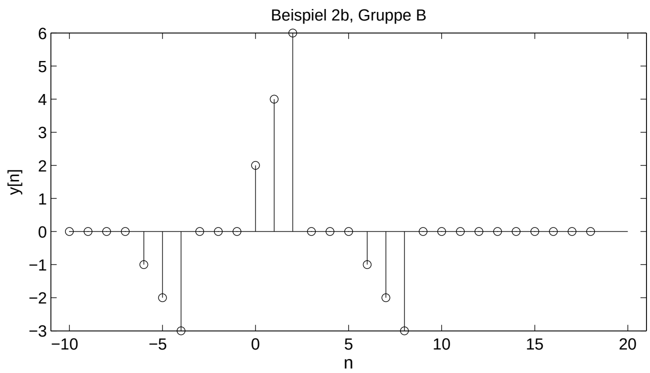
Gruppe B

a) $h_1[n]$ an den Eingang verschieben:

$\Rightarrow h_{ges}[n] = h_1[n] - h_1[n-6]$

$$\Rightarrow h_1[n] = \begin{cases} n+1 & 0 \le n \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) $y[n] = 2h_1[n] - h_1[n+6] - h_1[n-6]$



Gruppe C

a) $h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$
$h_{ges}[n] = h_1[n] + h_1[n-1] - \delta[n] = 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$
$h_1[n] + h_1[n-1] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$
Entweder man erkennt sofort, dass damit $h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$ ist oder man löst diese Gleichung schrittweise für $n = 0, 1, 2, ...$

b) $y[n] = 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + \delta[n-3]$, Skizze trivial

3. Beispiel:

Gruppe A

Das Filter ist ein idealisierter Tiefpass mit der Grenzfrequenz $\theta_g = \frac{\pi}{3}$ und mit einer Signalverzögerung um zwei Abtastintervalle.

a) $y[n] = \cos\frac{\pi}{4}(n-2)$
$Y(e^{j\theta}) = \pi\, e^{-j2\theta}\left[\delta_{2\pi}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \delta_{2\pi}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

b) $x[n] = e^{j\frac{\pi}{2}(n-5)}$ wird unterdrückt, d.h. $y[n] = 0,\ \forall n$

c) $X(e^{j\theta}) = e^{j2\theta}\,\frac{2\pi}{8}\sum_{k=\infty}^{\infty}\delta\left(\theta - \frac{\pi}{4}k\right)$

Am Filterausgang bleiben für $\theta \in [-\pi, \pi]$ von dieser Summe nur die Terme mit $k = -1, 0, 1$ übrig.
$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{4}n$
$Y(e^{j\theta}) = \frac{\pi}{4}\left[\delta_{2\pi}(\theta) + \delta_{2\pi}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \delta_{2\pi}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

Gruppe B

Das Filter ist ein idealisierter Hochpass mit der Grenzfrequenz $\theta_g = \frac{2\pi}{3}$.

a) $y[n] = \sin\frac{3\pi}{4}n$
$Y(e^{j\theta}) = \frac{\pi}{j}\left[\delta_{2\pi}\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) - \delta_{2\pi}\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right)\right]$

b) $X(e^{j\theta}) = \frac{2\pi}{8}\sum_{k=\infty}^{\infty}\delta\left(\theta - \frac{\pi}{4}k\right)$

Am Filterausgang bleiben für $\theta \in [0, 2\pi]$ von dieser Summe nur die Terme mit $k = 3, 4, 5$ übrig. Es ist besser das Frequenzintervall $[0, 2\pi]$ anstelle von $[-\pi, \pi]$ zu nehmen, da sonst δ-Impulse an den Intervallgrenzen liegen, die man "halbieren" müsste. Im Intervall $[0, 2\pi]$ liegt nur ein δ-Impuls bei $\theta = \pi$. Für die inverse Fouriertransformation ist es egal, welches der beiden 2π-Intervalle man verwendet.
$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{4}\cos\frac{3\pi}{4}n + \frac{1}{8}(-1)^n$

$$Y(e^{j\theta}) = \frac{\pi}{4}\left[\delta_{2\pi}\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) + \delta_{2\pi}(\theta - \pi) + \delta_{2\pi}\left(\theta - \frac{5\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[\delta_{2\pi}\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) + \delta_{2\pi}(\theta - \pi) + \delta_{2\pi}\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

c) $x[n] = \delta[n-1]$

$\Rightarrow y[n] = h[n-1]$

$$Y(e^{j\theta}) = \begin{cases} 0 & |\theta| < \frac{2\pi}{3} \\ e^{-j\theta} & \frac{2\pi}{3} < |\theta| \leq \pi \end{cases}, \quad 2\pi \text{ periodisch}$$

Gruppe C

Das Filter ist idealisierter, komplexwertiger Bandpass mit den Grenzfrequenzen $\theta_{g1} = \frac{\pi}{4}$ und $\theta_{g2} = \frac{3\pi}{4}$ (Mittenfrequenz $\pi/2$ wegen Faktor $j^n = e^{j\frac{\pi}{2}n}$ in $h[n]$).

a) $y[n] = \frac{1}{2}\, e^{j\frac{\pi}{2}n}$

$Y(e^{j\theta}) = \pi\delta_{2\pi}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $y[n] = x[n] = j^{n-3}$

$Y(e^{j\theta}) = e^{-j3\theta}\, 2\pi\delta_{2\pi}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y[n] = \frac{1}{6}\left(e^{j\frac{\pi}{3}n} + e^{j\frac{2\pi}{3}n}\right)$

$Y(e^{j\theta}) = \frac{\pi}{3}\left[\delta_{2\pi}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \delta_{2\pi}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$