Lösungen zu den 2. Tests
Signale und Systeme 2, Sommersemester 2006

Institut für Nachrichtentechnik
und Hochfrequenztechnik E389
20.6.2006 G. Doblinger

1. Beispiel:

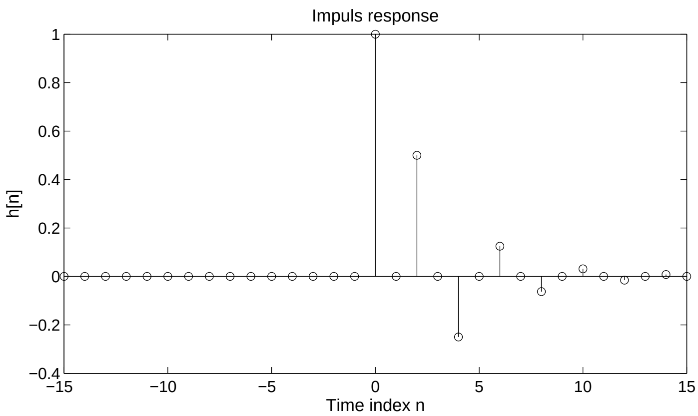
Gruppe A

a) $H(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2+\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z^2+\frac{1}{2}} = 1 - j\dfrac{\sqrt{2}}{4}\dfrac{1}{z-\frac{j}{\sqrt{2}}} + j\dfrac{\sqrt{2}}{4}\dfrac{1}{z+\frac{j}{\sqrt{2}}}$

b) Pole: $z_{\infty_{1,2}} = \pm\frac{j}{\sqrt{2}}$, Nullstellen: $z_{0_{1,2}} = \pm j$

c) $y[n] + \frac{1}{2}\,y[n-2] = x[n] + x[n-2]$,
$N = M = 2,\ a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{2},\ b_0 = 1,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1$

d) $h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n j^n\big(1+(-1)^n\big)\sigma[n-1] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ -\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} & n \text{ gerade} \\ 0 & n<0,\ n \text{ ungerade} \end{cases}$



e) mit $x[n] \equiv 0$, $w[-1] = 0$ und $w[-2] = -2$ folgt
$W(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-2}W(z)$ und $Y(z) = -2 + W(z)\,(1+z^{-2})$
$\Rightarrow \quad Y(z) = -2 + H(z)$ und damit $y[n] = -2\delta[n] + h[n]$
(Sieht man auch direkt anhand des Schaltbildes: $w[-2] = -2$ entspricht der Einspeisung von $-2\delta[n]$ am Ausgang des unteren Verzögerungselements.)

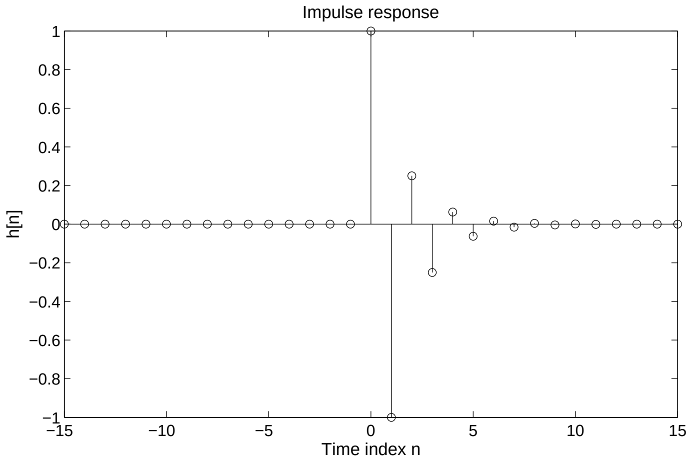
Gruppe B

a) $H(z) = \dfrac{z^2-z}{z^2-\frac{1}{4}} = 1 - \dfrac{z-\frac{1}{4}}{z^2-\frac{1}{4}} = 1 - \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{z+\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{z-\frac{1}{2}}$

b) Pole: $z_{\infty_{1,2}} = \pm\frac{1}{2}$, Nullstellen: $z_{0_1} = 0,\ z_{0_2} = 1$

c) $y[n] - \frac{1}{4}\,y[n-2] = x[n] - x[n-1]$,
$N = 2,\ M = 1,\ a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{1}{4},\ b_0 = 1,\ b_1 = -1$

d) $h[n] = \delta[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \big(3(-1)^n - 1\big)\sigma[n-1]$



e) mit $x[n] \equiv 0$, $w[-1] = 0$ und $w[-2] = 4$ folgt

$W(z) = 1 - \frac{1}{4}z^{-2}W(z)$ und $Y(z) = W(z)\,(1 - z^{-1})$

$\Rightarrow \quad Y(z) = H(z)$ und damit $y[n] = h[n]$

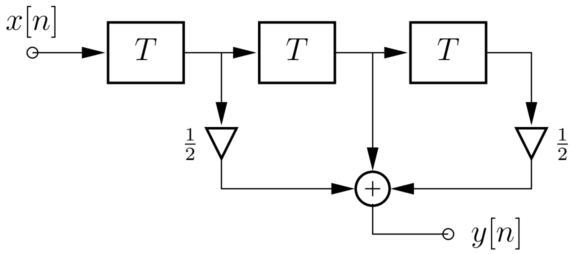
(Sieht man auch direkt anhand des Schaltbildes: $w[-2] = 4$ entspricht der Einspeisung von $4\delta[n]$ am Ausgang des unteren Verzögerungselements.)

2. Beispiel:

Gruppe A

a) $h[n] = \frac{1}{2}\,\delta[n-1] + \delta[n-2] + \frac{1}{2}\,\delta[n-3]$

$\Rightarrow$ FIR-Filter:



b) $H(z) = \dfrac{1}{2z^3}\,(z+1)^2$

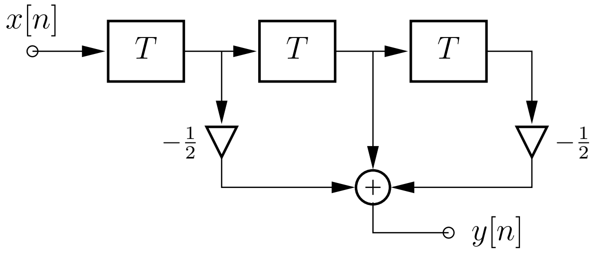
c) 2-fache Nullstelle bei $z = -1$, 3-fache Polstelle bei $z = 0$

d) $H[k] = H(z)\Big|_{z = e^{j\frac{2\pi}{4}k}}, \quad k = 0, 1, 2, 3$

Gruppe B

a) $h[n] = -\frac{1}{2}\,\delta[n-1] + \delta[n-2] - \frac{1}{2}\,\delta[n-3]$

$\Rightarrow$ FIR-Filter:



b) $H(z) = -\frac{1}{2z^3}\,(z-1)^2$

c) 2-fache Nullstelle bei $z = 1$, 3-fache Polstelle bei $z = 0$

d) $H[k] = H(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{4}k}}, \quad k = 0, 1, 2, 3$

3. Beispiel:

Gruppe A

a) $X(z) = k\,\frac{z(z-1)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$

$k = \frac{3}{8}$ ergibt sich aus $X(-1) = 1$ (2. gegebene Bedingung)

b) $x[n]$ ist eine stabile Folge (1. gegebene Bedingung); Pole von $X(z)$ liegen innerhalb des Einheitskreises

$\Rightarrow$ $x[n]$ muss ein rechtsseitiges Signal sein, $X(z)$ konvergiert für $|z| > \frac{1}{2}$

$x[n] = \frac{3}{8}\left(\delta[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(3(-1)^n - 1\right)\sigma[n-1]\right)$

(Lösung entspricht bis auf Faktor $\frac{3}{8}$ jener von Gruppe B, Beispiel 1, Punkt d)

Gruppe B

a) $X(z) = k\,\frac{z(z+1)}{(z-2)(z+2)}$

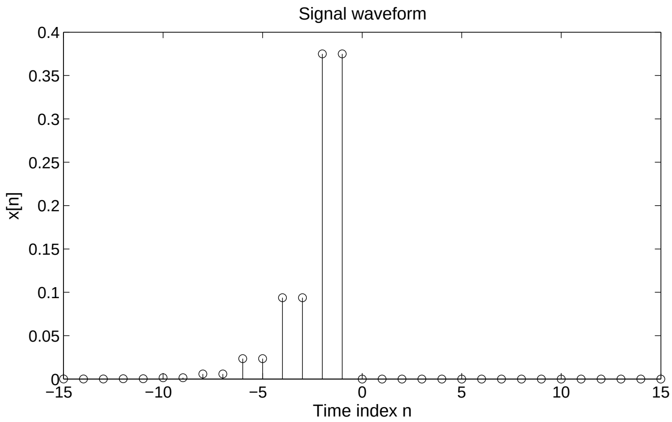
$k = -\frac{3}{2}$ ergibt sich aus $X(1) = 1$ (2. gegebene Bedingung)

b) $x[n]$ ist eine stabile Folge (1. gegebene Bedingung); Pole von $X(z)$ liegen außerhalb des Einheitskreises

$\Rightarrow$ $x[n]$ muss ein linksseitiges Signal sein, $X(z)$ konvergiert für $|z| < 2$

$X(z) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{z+2} - \frac{9}{4}\,\frac{1}{z-2}$

$x[n] = -\frac{3}{2}\,\delta[n] + \frac{3}{8}\,2^n\left((-1)^n + 3\right)\sigma[-n]$


Signal waveform
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
x[n]
−15
−10
−5
0
5
10
15
Time index n