ZUNAME: ....

VORNAME: ....

MAT. NR.: ....

2. SuS2-Teilprüfung A

Institut für Nachrichtentechnik
und Hochfrequenztechnik
G. Doblinger, J. Gonter, C. Novak
TU-Wien 16.6.2010

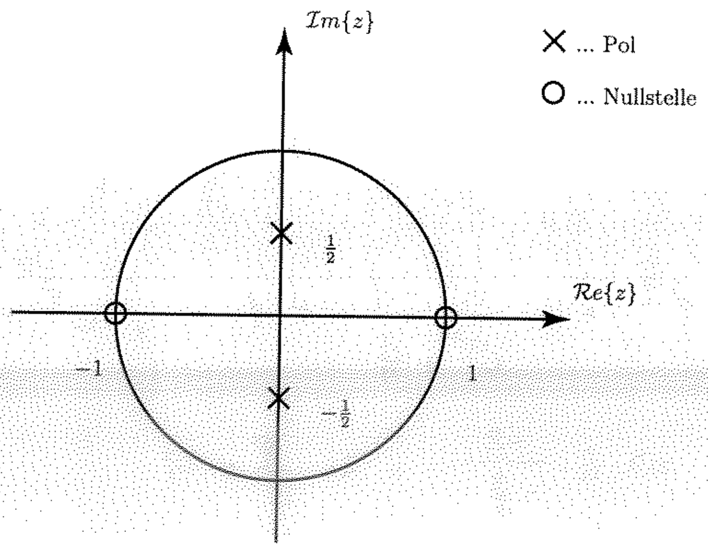
Bitte beachten Sie:

- An schriftlichen Unterlagen darf nur die **SuS2-Formelsammlung** verwendet werden!
- Die Beispiele ausschließlich auf den Seiten dieser Angabe ausarbeiten. **Zusatzblätter werden ignoriert!**
- Eine **lesbare Schrift und übersichtliche Darstellung** ist eine Voraussetzung für die positive Beurteilung Ihrer Arbeit!
- **Mobiltelefone** müssen während des Tests **ausgeschaltet** sein!
- Die Antworten auf Teilaufgaben, deren jeweils richtige Antwort aus einer Auswahl von Lösungen gefunden werden muss, **müssen plausibilisiert werden!**

Aufgabe:	1	2	3	4	Summe
Punkte (max.):	35	25	20	20	100
Punkte:					

Aufgabe 1: (35 Punkte)

Gegeben ist ein System $H(z)$ mit folgendem Pol/Nullstellendiagramm.



(a) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_1, a_2, b_1,$ und b_2 der allgemeinen Übertragungsfunktion

$$H(z) = k \cdot \frac{z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

passend zum Pol/Nullstellendiagramm.

$$H(z) = k \cdot \frac{(z+1)(z-1)}{(z+j/2)(z-j/2)} = k \cdot \frac{z^2-1}{z^2+\frac{1}{4}}$$

$a_1 = 0$	$b_1 = 0$
$a_2 = \frac{1}{4}$	$b_2 = -1$

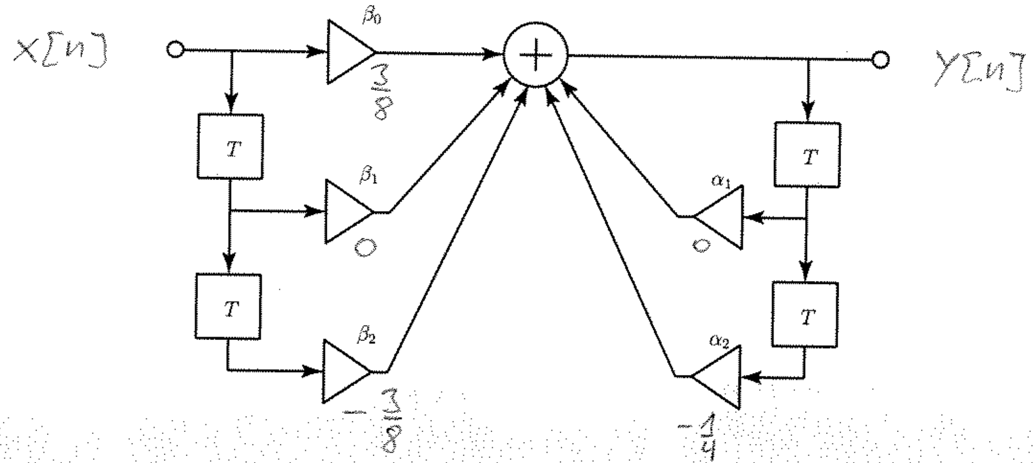
(b) (5 Punkte) Bestimmen Sie k so, dass $H(z)|_{z=e^{j\pi/2}} = 1$ ist.

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = k \cdot \frac{e^{j\pi}-1}{e^{j\pi}+\frac{1}{4}} \stackrel{!}{=} 1 \quad , \quad e^{j\pi} = -1$$

$$\Rightarrow k \cdot \frac{-2}{-\frac{3}{4}} = k \cdot \frac{8}{3} = 1$$

$k = \frac{3}{8}$

(c) (10 Punkte) Bestimmen Sie die fehlenden Fillterkoeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ im folgenden Schaltbild, sodass damit die in Punkt (a) gegebene Übertragungsfunktion realisiert wird (Verwenden Sie den Faktor k aus Punkt b).



$$H(z) = \frac{3}{8} \; \frac{z^2-1}{z^2+\frac{1}{4}} = \frac{3}{8} \; \frac{1-z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow \quad 3X(1-z^{-2}) = 8Y(1+\tfrac{1}{4}z^{-2})$$

$$3x[n] - 3x[n-2] = 8y[n] + 2y[n-2]$$

$$y[n] = \frac{3}{8}x[n] - \frac{3}{8}x[n-2] - \frac{1}{4}y[n-2]$$

$\beta_0 =$ 3/8	
$\beta_1 =$ 0	$\alpha_1 =$ 0
$\beta_2 =$ $-3/8$	$\alpha_2 =$ $-1/4$

(d) (10 Punkte) Finden Sie nun die Impulsantwort $h[n]$ aus einer der bereits angegebenen Lösungen, und *tragen Sie das Kürzel für die richtige Antwort in das unterstrichene Feld ein.*

A. $\frac{3}{8}\delta[n] - \frac{15}{32}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \cos(\frac{\pi}{2}n)\sigma[n]$ B. $\frac{3}{8}\delta[n] - \frac{15}{32}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right)\sigma[n-2]$

C. $\frac{1}{4}\delta[n] - \frac{15}{32}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right)$ D. keine dieser Lösungen

$$H(z) = \frac{3}{8}\,\frac{z^2-1}{z^2+\frac{1}{4}} = \frac{3}{8}\,\frac{z^2+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}}{z^2+\frac{1}{4}} = \frac{3}{8}\left[1-\frac{5}{4}\,\frac{1}{z^2+\frac{1}{4}}\right]$$

aus Formelsammlung: $\rho^n \cos(\alpha n)\,\sigma[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{z(z-\rho\cos\alpha)}{z^2-2\rho z\cos\alpha+\rho^2}$

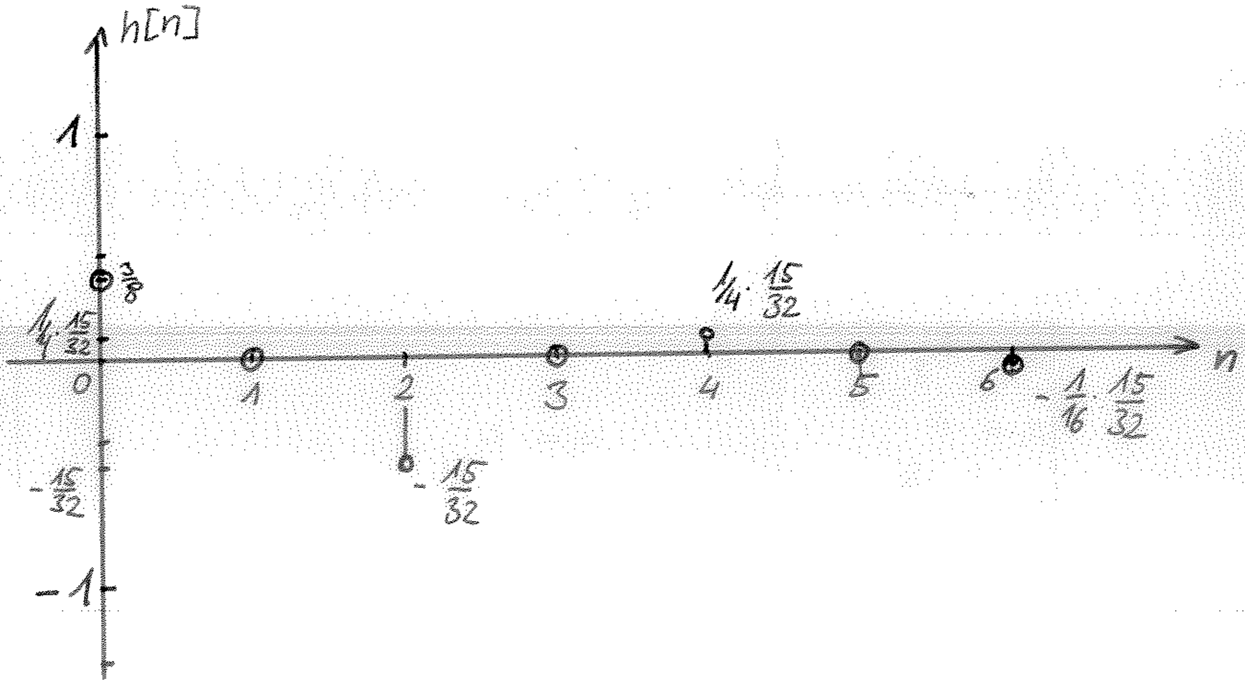
mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\rho = \frac{1}{2}$:

$$\tilde{h}[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{\pi}{2}n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z^2}{z^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow h[n] = \frac{3}{8}\cdot\delta[n] - \frac{15}{32}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right)\cdot\sigma[n-2]$$

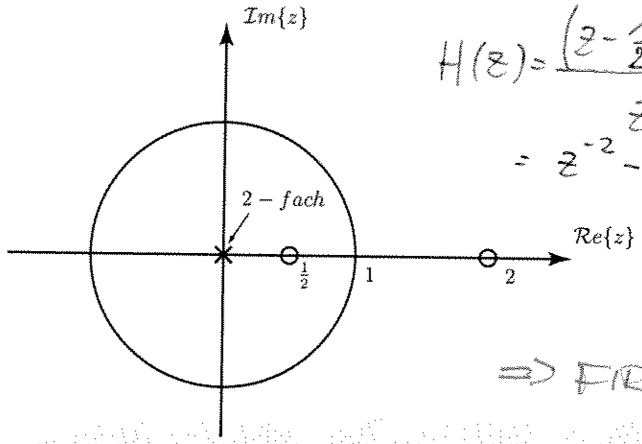
(d) B

(e) (5 Punkte) Skizzieren Sie $h[n]$



Aufgabe 2: (25 Punkte)

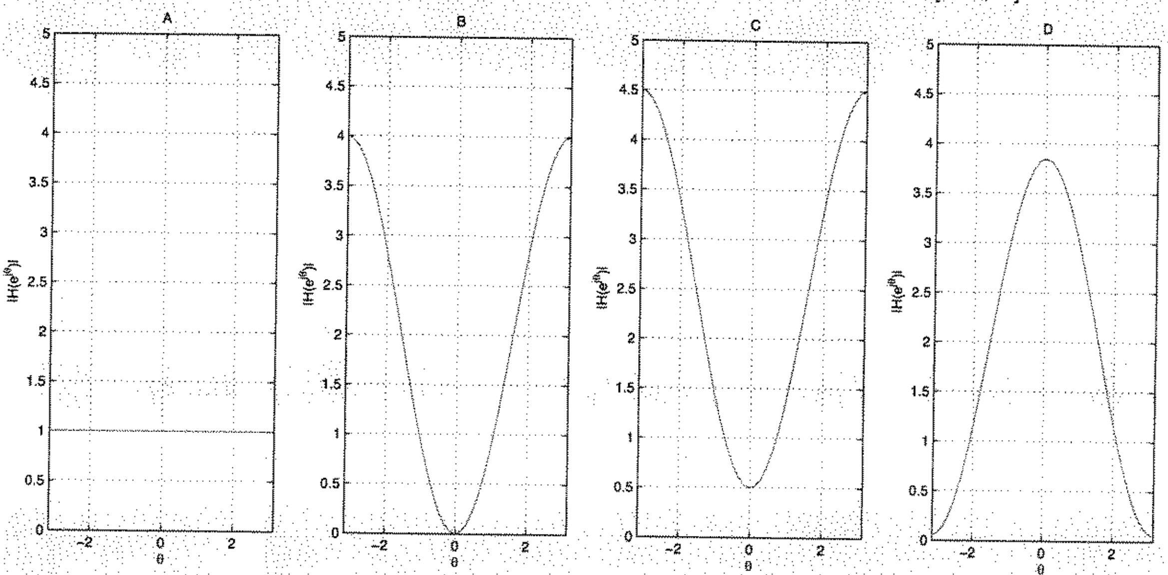
Gegeben ist ein System $H(z)$ mit folgendem Pol/Nullstellendiagramm.



$$H(z) = \frac{(z-\frac{1}{2})(z-2)}{z^2} =$$
$$= z^{-2} - \frac{5}{2} z^{-1} + 1$$

$\Rightarrow$ FIR-Filter!

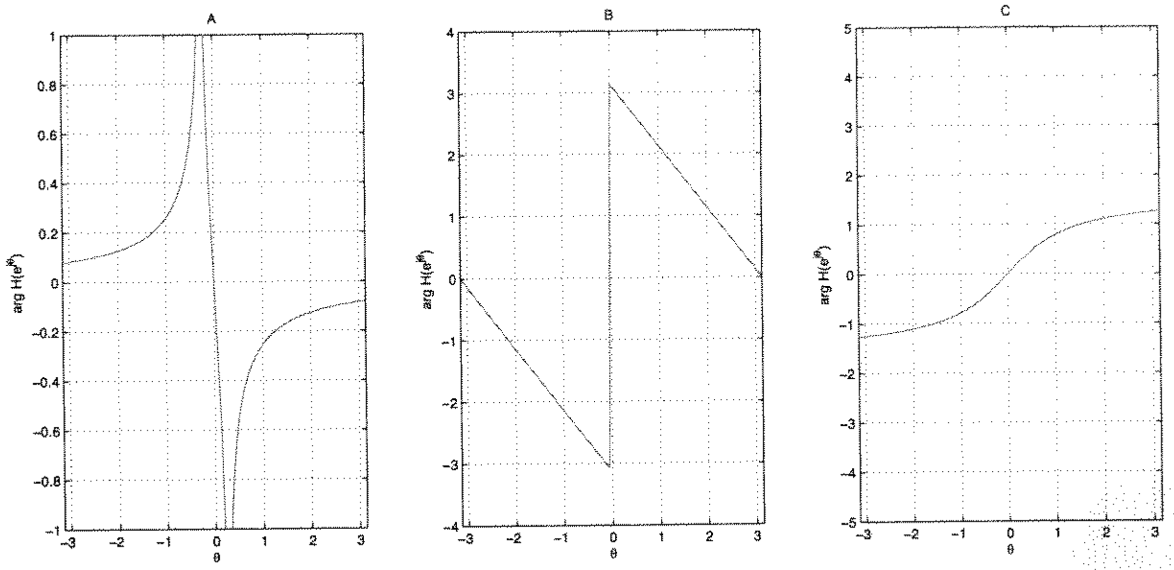
(a) (6 Punkte) Der Betragsverlauf des Frequenzganges $H(e^{j\theta})$ ist, für $\theta \in [-\pi, \pi]$:



Tragen Sie das Kürzel für die richtige Antwort in das unterstrichene Feld ein (E: keine der Lösungen.)

(a) C

(b) (6 Punkte) Der Phasenverlauf des Frequenzganges $H(e^{j\theta})$ ist:



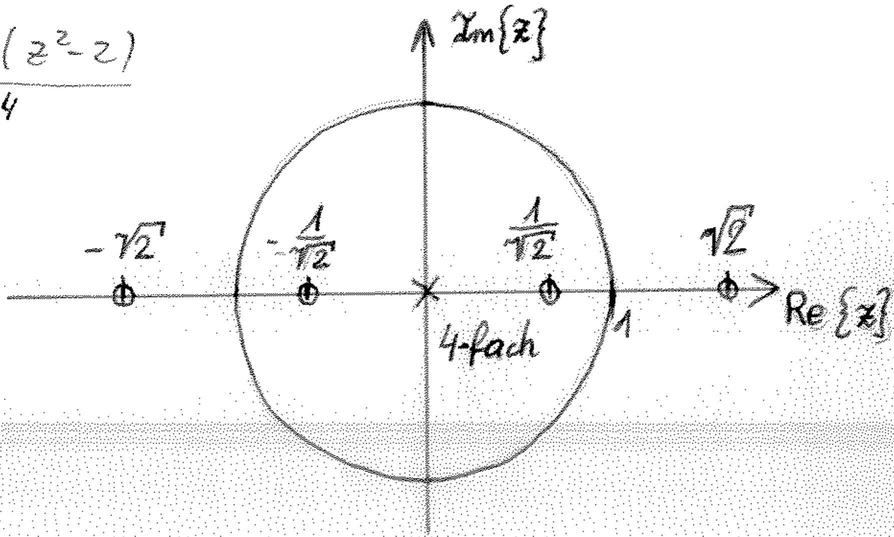
Tragen Sie das Kürzel für die richtige Antwort in das unterstrichene Feld ein (D: keine der Lösungen.)

FIR-Filter: Lineare Phase

(b) B

(c) (8 Punkte) Nun wird eine Frequenztransformation gemäss der Substitution $z \to z^2$ vorgenommen. Die dabei entstehende Übertragungsfunktion wird mit $\widetilde{H}(z)$ bezeichnet. Zeichnen Sie das Pol/Nullstellendiagramm von $\widetilde{H}(z)$.

$$\widetilde{H}(z) = \frac{(z^2 - \frac{1}{2})(z^2 - 2)}{z^4}$$



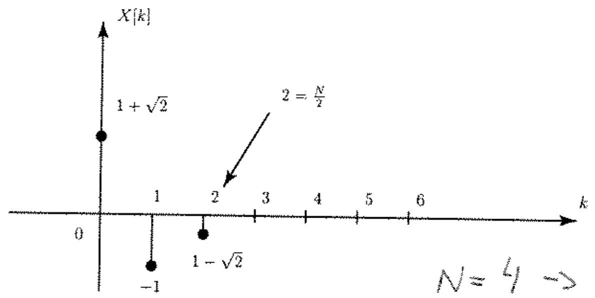
(d) (5 Punkte) Bei dem System $\widetilde{H}(z)$ handelt es sich um eine(n)

A. Tiefpass B. Hochpass C. Bandpass D. Bandsperre

(d) C

Aufgabe 3: (20 Punkte)

Von einem ***reellen*** N-Punkte Signal $x[n]$ ist die DFT $X[k]$ für $k = 0, ..., \frac{N}{2}$ gegeben:



$N = 4 \rightarrow$ es fehlt nur $X[3]$

(a) (7 Punkte) Ergänzen Sie $X[k]$ für $k = \frac{N}{2} + 1, ..., N - 1$

$x[n]$, $X[k]$ reell: $\quad X^*[k] = X[k] = X[N-k]$

$$X[3] = X[\underbrace{4}_{N} - \underbrace{3}_{k}] = X[1] = -1$$

(a) -1

(b) (13 Punkte) Finden Sie $x[n]$ aus einer der bereits angegebenen Lösungen, und *tragen Sie das Kürzel für die richtige Antwort in das unterstrichene Feld ein.*

A. $\frac{1}{4} \cdot \left[(1+\sqrt{2}) + (-1)^n \cdot (1-\sqrt{2})\right]$ B. $\frac{(-1)^n}{4} \cdot \left[(1+\sqrt{2}) - \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right]$
C. $\frac{1}{4} \cdot \left[2(-1)^n \cdot (1+\sqrt{2}) + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right]$ D. $\frac{1}{4} \cdot \left[1+\sqrt{2} + (-1)^n \cdot (1-\sqrt{2}) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right]$
E. keine dieser Lösungen

$$X[k] = (1+\sqrt{2})\,\delta[k] - \delta[k-1] + (1-\sqrt{2})\,\delta[k-2] - \delta[k-3]$$

$$= \frac{1}{N}\left[(1+\sqrt{2})\,N\,\delta[k] - N\,\delta[k-1] + (1-\sqrt{2})\,N\,\delta[k-2] - N\,\delta[k-3]\right]$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\left[(1+\sqrt{2}) - e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot n} + (1-\sqrt{2})\,e^{j\frac{4\pi}{N}\cdot n} - e^{j\frac{2\pi\cdot 3}{N}\cdot n}\right]$$

$\underline{N=4}$: $\frac{1}{4}\left((1+\sqrt{2}) - e^{j\frac{\pi}{2}n} + (1-\sqrt{2}) e^{j\pi n} - e^{j\frac{3\pi}{2}n} \right)$

$= \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{2} + (1-\sqrt{2}) \underbrace{e^{j\pi n}} - \underbrace{e^{j\pi n}} \cdot \frac{2}{2}\underbrace{\left[e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n} \right]} \right)$

$= \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{2} + (1-\sqrt{2})(-1)^n - \underbrace{(-1)^n} \cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \right)$

$= \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{2} + (1-\sqrt{2})(-1)^n - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \right)$

hat keine Auswirkung

(b) D

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Gegeben ist ein System von Differenzengleichungen,

$$\text{I}: \quad y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = w[n] - \frac{1}{4}x[n]$$

$$\text{II}: \quad y[n] + \frac{1}{2}w[n-1] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] \, .$$

Nehmen Sie im Weiteren ***verschwindende Anfangsbedingungen*** an.

(a) (13 Punkte) Bestimmen Sie eine Differenzengleichung für $y[n]$ und $x[n]$, in der das Zwischensignal $w[n]$ nicht vorkommt. *Tragen Sie das Kürzel für die richtige Antwort in das unterstrichene Feld ein.*

A. $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{3}{8}x[n-1]$
B. $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{3}{8}x[n+1]$
C. $y[n] + \frac{1}{2}y[n+1] + \frac{1}{4}y[n+2] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{3}{8}x[n+1]$
D. $2y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = \frac{3}{8}x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$
E. keine dieser Lösungen

aus I: $w[n] = y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}x[n]$

$W = Y\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right) + \frac{1}{4}X$

$$\text{II}: \quad Y + \frac{1}{2} z^{-1} W = \frac{1}{2} X + \frac{1}{2} X z^{-1}$$

<u>I in II:</u>

$$Y + \frac{1}{2} Y \left(z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} \right) + \frac{1}{8} X z^{-1} = \frac{1}{2} X + \frac{1}{2} X z^{-1}$$

$$y[n] + \frac{1}{2} y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = \frac{1}{2} x[n] + \frac{3}{8} x[n-1]$$

(a) 7

(b) (7 Punkte) Berechnen Sie die Nullstellen und Pole des Systems.

$$Y \left(1 + \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2} \right) = X \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} z^{-1} \right)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{8} z^{-1}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}} = \frac{1}{2} z \, \frac{z + 3/4}{z^2 + 1/2 z + \frac{1}{4}}$$

$$z^2 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \pm j \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

Nullstellen: $0, -\frac{3}{4}$	Pole: $-\frac{1}{4} \pm j \frac{2\sqrt{3}}{4}$

Raum für Nebenrechnungen