ZUNAME: ....

VORNAME: ....

MAT. NR.: ....

2. SuS2-Teilprüfung **B**

Institut für Nachrichtentechnik
und Hochfrequenztechnik
G. Doblinger, J. Gonter, C. Novak
TU-Wien 16.6.2010

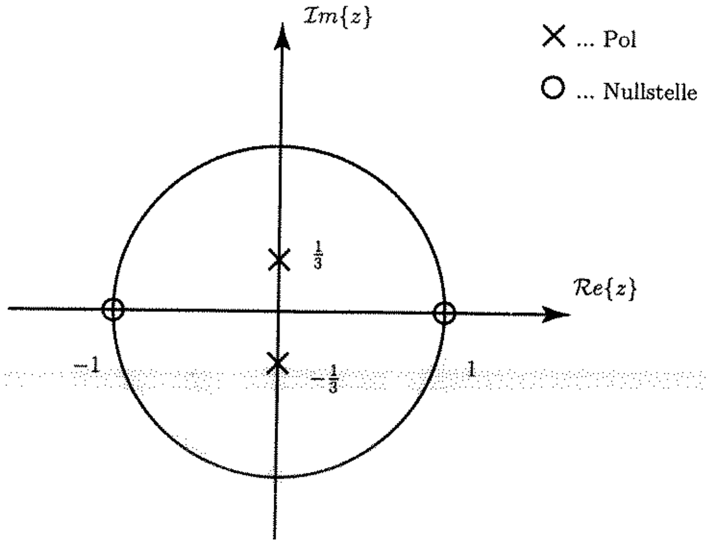
Bitte beachten Sie:

- An schriftlichen Unterlagen darf nur die **SuS2-Formelsammlung** verwendet werden!
- Die Beispiele ausschließlich auf den Seiten dieser Angabe ausarbeiten. **Zusatzblätter werden ignoriert!**
- Eine **lesbare Schrift und übersichtliche Darstellung** ist eine Voraussetzung für die positive Beurteilung Ihrer Arbeit!
- **Mobiltelefone** müssen während des Tests **ausgeschaltet** sein!
- Die Antworten auf Teilaufgaben, deren jeweils richtige Antwort aus einer Auswahl von Lösungen gefunden werden muss, **müssen plausibilisiert werden!**

Aufgabe:	1	2	3	4	Summe
Punkte (max.):	35	25	20	20	100
Punkte:					

Aufgabe 1: (35 Punkte)

Gegeben ist ein System $H(z)$ mit folgendem Pol/Nullstellendiagramm.



(a) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_1, a_2, b_1,$ und b_2 der allgemeinen Übertragungsfunktion

$$H(z) = k \cdot \frac{z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

passend zum Pol/Nullstellendiagramm.

$$H(z) = k \cdot \frac{(z+1)(z-1)}{(z+j/3)(z-j/3)} = k \cdot \frac{z^2-1}{z^2+\frac{1}{9}}$$

$a_1 =$ 0	$b_1 =$ 0
$a_2 =$ 1/9	$b_2 =$ −1

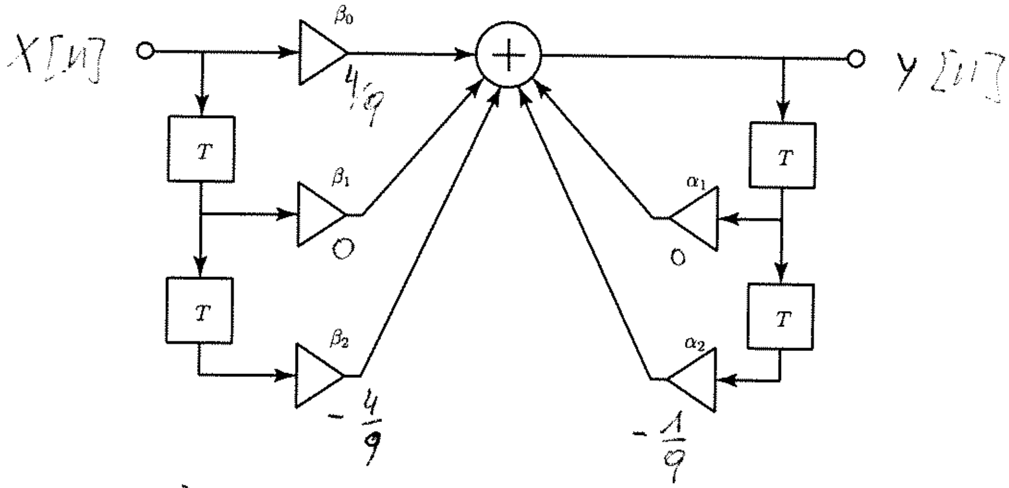
(b) (5 Punkte) Bestimmen Sie k so, dass $H(z)|_{z=e^{j\pi/2}} = 1$ ist.

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = k \cdot \frac{e^{j\pi}-1}{e^{j\pi}+\frac{1}{9}} \quad , e^{j\pi} = -1$$

$$\Rightarrow k \cdot \frac{-2}{-\frac{8}{9}} = k \cdot \frac{18}{8} = k \cdot \frac{9}{4}$$

$k = \frac{4}{9}$

(c) (10 Punkte) Bestimmen Sie die fehlenden Filterkoeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ im folgenden Schaltbild, sodass damit die in Punkt (a) gegebene Übertragungsfunktion realisiert wird (Verwenden Sie den Faktor k aus Punkt b).



$$H(z) = \frac{4}{9} \cdot \frac{z^2 - 1}{z^2 + \frac{1}{9}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1 - z^{-2}}{1 + \frac{1}{9} z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow \quad 4X(1 - z^{-2}) = 9Y\left(1 + \frac{1}{9} z^{-2}\right)$$

$$4x[n] - 4x[n-2] = 9y[n] + y[n-2]$$

$$\Rightarrow \quad y[n] = \frac{4}{9} x[n] - \frac{4}{9} x[n-2] - \frac{1}{9} y[n-2]$$

$\beta_0 =$ 4/9	
$\beta_1 =$ 0	$\alpha_1 =$ 0
$\beta_2 =$ − 4/9	$\alpha_2 =$ − 1/9

(d) (10 Punkte) Finden Sie nun die Impulsantwort $h[n]$ aus einer der bereits angegebenen Lösungen, und *tragen Sie das Kürzel für die richtige Antwort in das unterstrichene Feld ein.*

A. $\frac{4}{9}\delta[n] - \frac{40}{81}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right)$ B. $\frac{3}{8}\delta[n] - \frac{40}{81}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}n)\sigma[n]$ C. $\frac{4}{9}\delta[n] - \frac{40}{81}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right)\sigma[n-2]$ D. keine dieser Lösungen

$$H(z) = \frac{4}{9}\,\frac{z^2-1}{z^2+\frac{1}{9}} = \frac{4}{9}\,\frac{z^2+\frac{1}{9}-\frac{10}{9}}{z^2+\frac{1}{9}} = \frac{4}{9}\left[1 - \frac{10}{9}\,\frac{1}{z^2+\frac{1}{9}}\right]$$

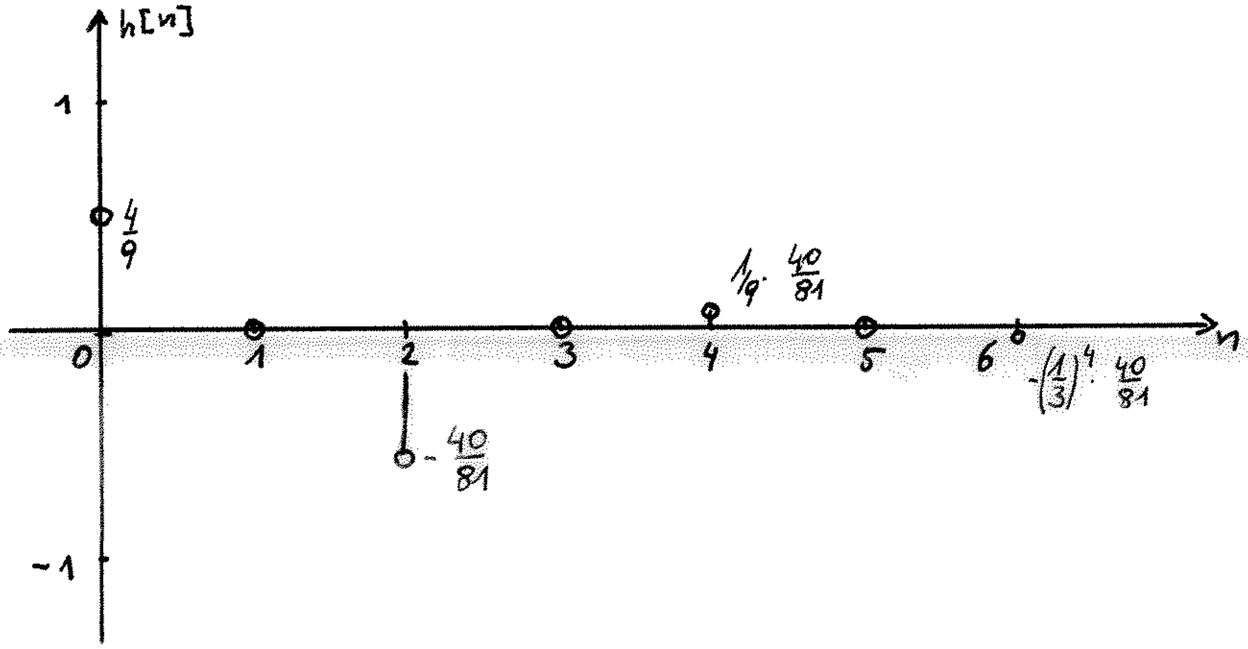
aus Formelsammlung: $\varrho^n \cos(\alpha n)\,\sigma[n] \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{z(z-\varrho\cos\alpha)}{z^2-2\varrho z\cdot\cos\alpha+\varrho^2}$

mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\varrho = \frac{1}{3}$: $\tilde{h}[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \cos\frac{\pi}{2}n \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{z^2}{z^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

$$\Rightarrow h[n] = \frac{4}{9}\cdot\delta[n] - \frac{40}{81}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right)\cdot\sigma[n-2]$$

(d) C

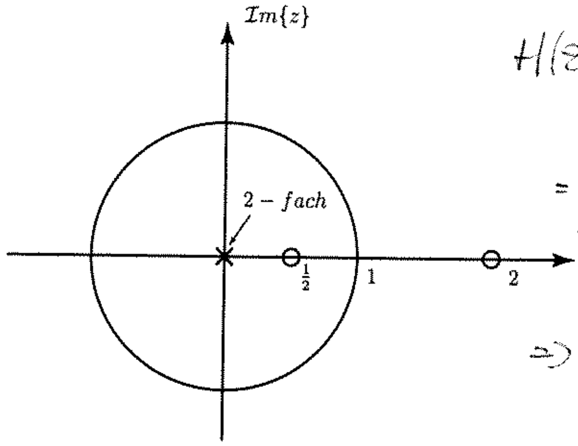
(e) (5 Punkte) Skizzieren Sie $h[n]$



ident zu Gruppe A / Aufgabe 2

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Gegeben ist ein System $H(z)$ mit folgendem Pol/Nullstellendiagramm.

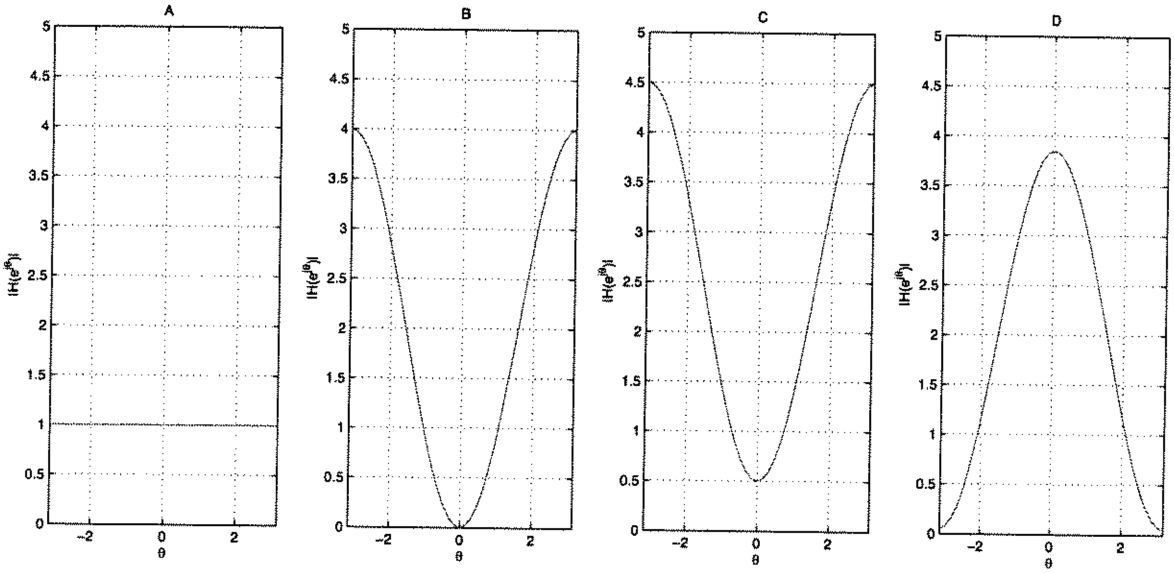


$H(z) = \frac{(z-\frac{1}{2})(z-2)}{z^2}$

$= z^{-2} - \frac{5}{2} z^{-1} + 1$

$\Rightarrow$ FIR - Filter !

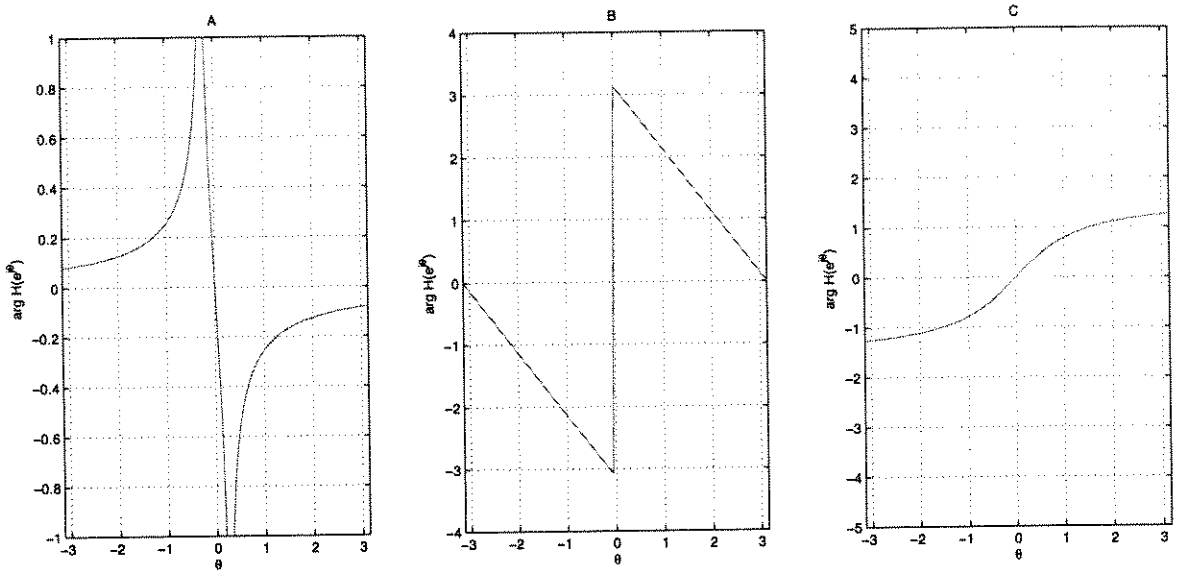
(a) (6 Punkte) Der Betragsverlauf des Frequenzganges $H(e^{j\theta})$ ist, für $\theta \in [-\pi, \pi]$:



Tragen Sie das Kürzel für die richtige Antwort in das unterstrichene Feld ein (E: keine der Lösungen.)

(a) C

(b) (6 Punkte) Der Phasenverlauf des Frequenzganges $H(e^{j\theta})$ ist:



Tragen Sie das Kürzel für die richtige Antwort in das unterstrichene Feld ein (D: keine der Lösungen.)

FIR-Filter: Lineare Phase

(b) B

(c) (8 Punkte) Nun wird eine Frequenztransformation gemäss der Substitution $z \to z^2$ vorgenommen. Die dabei entstehende Übertragungsfunktion wird mit $\widetilde{H}(z)$ bezeichnet. Zeichnen Sie das Pol/Nullstellendiagramm von $\widetilde{H}(z)$.

$$\widetilde{H}(z) = \frac{(z^2-\frac{1}{2})(z^2-2)}{z^4}$$

Siehe Gruppe A

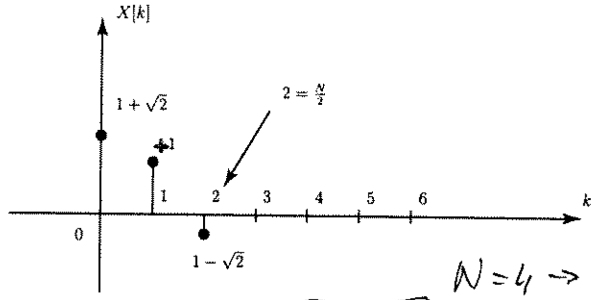
(d) (5 Punkte) Bei dem System $\widetilde{H}(z)$ handelt es sich um eine(n)

A. Tiefpass B. Hochpass C. Bandpass D. Bandsperre

(d) C

Aufgabe 3: (20 Punkte)

Von einem ***reellen*** N-Punkte Signal $x[n]$ ist die DFT $X[k]$ für $k = 0, ..., \frac{N}{2}$ gegeben:



$N=4 \rightarrow$ es fehlt nur $X[3]$

(a) (7 Punkte) Ergänzen Sie $X[k]$ für $k = \frac{N}{2} + 1, ..., N - 1$

$x[n], X[k]$ reell: $X^*[k] = X[k] = X[N-k]$

$X[3] = X[\underset{\downarrow\, N}{4} - \underset{\downarrow\, k}{3}] = X[1] = 1$

(a) 1

(b) (13 Punkte) Finden Sie $x[n]$ aus einer der bereits angegebenen Lösungen, und *tragen Sie das Kürzel für die richtige Antwort in das unterstrichene Feld ein.*

A. $\frac{1}{4} \cdot [1 + \sqrt{2} + (-1)^n \cdot (1 - \sqrt{2}) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)]$ B. $\frac{1}{4} \cdot [(1 + \sqrt{2}) + (-1)^n \cdot (1 - \sqrt{2})]$
C. $\frac{1}{4} \cdot [2(-1)^n \cdot (1 + \sqrt{2}) - \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)]$ D. $\frac{(-1)^n}{4} \cdot [(1 + \sqrt{2}) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)]$
E. keine der Lösungen

$$X[k] = (1+\sqrt{2})\,\delta[k] + \delta[k-1] + (1-\sqrt{2})\,\delta[k-2] + \delta[k-3]$$

$$= \frac{1}{N}\left[(1+\sqrt{2})N\,\delta[k] + N\,\delta[k-1] + (1-\sqrt{2})N\,\delta[k-2] + N\,\delta[k-3]\right]$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\left[(1+\sqrt{2}) + e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot n} + (1-\sqrt{2})e^{j\frac{4\pi}{N}\cdot n} + e^{j\frac{2\pi\cdot 3}{N}\cdot n}\right]$$

$\underline{n=4}$: $\frac{1}{4}\left((1+\sqrt{2}) + e^{j\frac{\pi}{2}\cdot n} + (1-\sqrt{2})\, e^{j\pi n} + e^{j\frac{3\pi}{2}\cdot n}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{2} + (1-\sqrt{2})\, e^{j\pi n} + e^{j\pi n}\left[e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right]\right)$

$= \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{2} + (1-\sqrt{2})(-1)^n + (-1)^n \cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{2} + (1-\sqrt{2})(-1)^n + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right)$

(b) A

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Gegeben ist ein System von Differenzengleichungen,

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = w[n-1] + \frac{1}{2}x[n]$$
$$y[n] - \frac{1}{2}w[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]\,.$$

Nehmen Sie im Weiteren ***verschwindende Anfangsbedingungen*** an.

(a) (13 Punkte) Bestimmen Sie eine Differenzengleichung für $y[n]$ und $x[n]$, in der das Zwischensignal $w[n]$ nicht vorkommt. *Tragen Sie das Kürzel für die richtige Antwort in das unterstrichene Feld ein.*

A. $y[n] - \frac{9}{4}y[n+1] = \frac{1}{2}x[n] - x[n+1] + x[n+2]$
B. $y[n] + \frac{9}{4}y[n-1] = -\frac{1}{4}x[n] - x[n-1] + x[n-2]$
C. $y[n] - \frac{9}{4}y[n-1] = \frac{1}{2}x[n] - x[n-1] + x[n-2]$
D. $2y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$

aus II: $w[n] = 2y[n] - x[n] + x[n-1]$

$W = 2Y - X(1 - z^{-1})$

$\mathrm{I}: \; Y(1-\frac{1}{4}z^{-1}) = W z^{-1} + \frac{1}{2}X$

II in I: $\; Y(1-\frac{1}{4}z^{-1}) = 2Yz^{-1} - Xz^{-1}(1-z^{-1}) + \frac{1}{2}X$

$Y(1-\frac{9}{4}z^{-1}) = X(\frac{1}{2} - z^{-1} + z^{-2})$

$y[n] - \frac{9}{4}y[n-1] = \frac{1}{2}x[n] - x[n-1] + x[n-2]$

(a) C

(b) (7 Punkte) Berechnen Sie die Nullstellen und Pole des Systems.

$H(z)$ $\; Y(1-\frac{9}{4}z^{-1}) = X(\frac{1}{2} - z^{-1} + z^{-2})$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{2} - z^{-1} + z^{-2}}{1-\frac{9}{4}z^{-1}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\frac{1}{2}z^2 - z + 1}{z - \frac{9}{4}}$

$\frac{1}{2}z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm j$

Nullstellen: $1 \pm j$	Pole: $0, \frac{9}{4}$

Raum für Nebenrechnungen