ZUNAME: ....

VORNAME: ....

MAT. NR.: ....

1. SuS2-Teilprüfung A

Institute of Telecommunications
G. Doblinger, J. Gonter
TU-Wien 3.5.2012

Bitte beachten Sie:

- An schriftlichen Unterlagen darf nur die **SuS2-Formelsammlung** verwendet werden!
- Die Beispiele ausschließlich auf den Seiten dieser Angabe ausarbeiten. **Zusatzblätter werden ignoriert!**
- Eine **lesbare Schrift und übersichtliche Darstellung** ist eine Voraussetzung für die positive Beurteilung Ihrer Arbeit!
- **Mobiltelefone** müssen während des Tests **ausgeschaltet** sein!

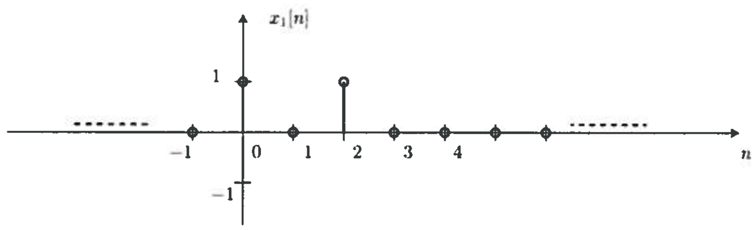
Aufgabe:	1	2	3	4	Summe
Punkte (max.):	21	30	25	24	100
Punkte:					

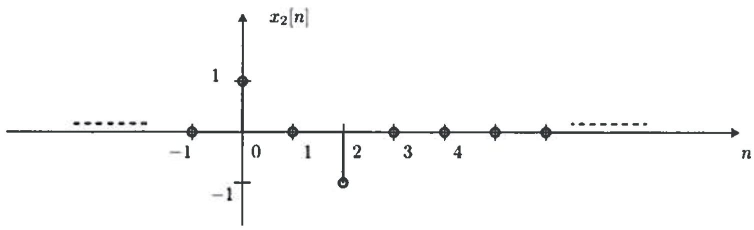
Aufgabe 1: (21 Punkte)

Von einem linearen, zeitinvarianten, zeitdiskreten System ist die Impulsantwort $h[n]$ gegeben:

$$h[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cos\left(\tfrac{\pi}{4}n\right)\sigma[n] \text{ \textit{(mit der Sprungfunktion} } \sigma[n]\text{\textit{)}}$$

Das System wird mit den beiden abgebildeten Signalen angeregt:





Die Systemantwort auf $x_1[n]$ sei $y_1[n]$ und jene auf $x_2[n]$ sei $y_2[n]$. Berechnen Sie die Systemantworten $y[n]$ (die Antwort des Systems auf $x[n]$) auf die Eingangssignale:

(a) (7 Punkte) $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$ $= \delta[n] + \delta[n-2] + \delta[n] - \delta[n-2]$

$= 2\delta[n]$

$y[n] = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right) \sigma[n]$

$= 2h[n]$

(b) (7 Punkte) $x[n] = x_1[n] - x_2[n]$ $= \delta[n] + \delta[n-2] - \delta[n] + \delta[n-2]$

$= 2\delta[n-2]$

$y[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}(n-2)\right) \sigma[n-2]$

$= 2h[n-2]$

(c) (7 Punkte) $x[n] = x_1[n-1] + x_2[n-1]$ $= \delta[n-1] + \delta[n-3] + \delta[n-1] - \delta[n-3]$

$= 2\,\delta[n-1]$

$y[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}(n-\cancel{2}1)\right) \sigma[n-1]$

$= 2h[n-1]$

Aufgabe 2: (30 Punkte)

Ein lineares, zeitinvariantes, zeitdiskretes System wird mit einem periodischen Signal angesteuert. Die Übertragungsfunktion $H(e^{j\theta})$ des Systems sei

$$H(e^{j\theta}) = \cos(\theta)\ .$$

Das Eingangssignal $x[n]$ habe die Fourierreihendarstellung

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{j\frac{2\pi}{4}kn}$$

mit $c_0 = c_2 = 1$ und $c_1 = c_3 = 0$.

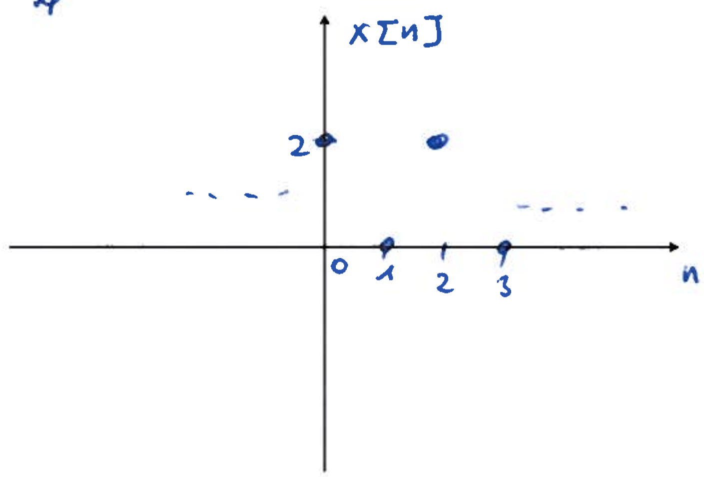
(a) (4 Punkte) Skizzieren Sie $x[n]$. *Wichtig: Die volle Punktezahl wird nur bei korrekt beschrifteten Achsen zuerkannt!*

$$x[0] = 1 \cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 0 \cdot 0}}_{1} + 1 \cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 2 \cdot 0}}_{1} = 2$$

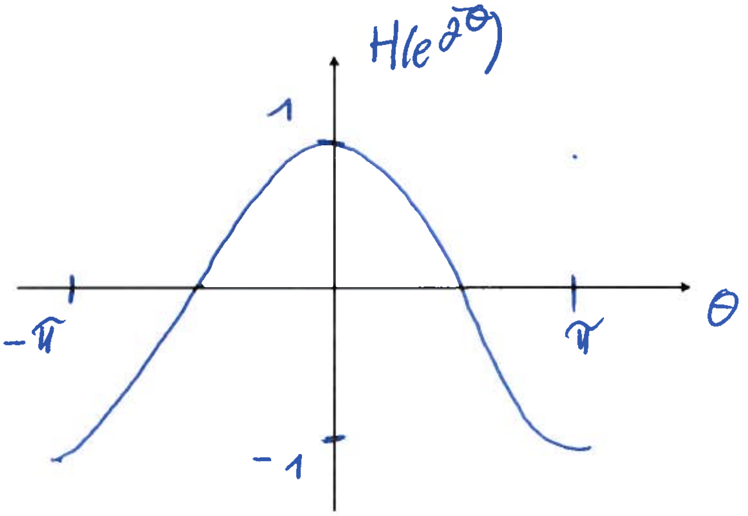
$$x[1] = 1 \cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 0 \cdot 1}}_{1} + 1 \cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 2 \cdot 1}}_{-1} = 0$$

$$x[2] = 1 \cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 0 \cdot 2}}_{1} + 1 \cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 2 \cdot 2}}_{1} = 2$$

$$x[3] = 1 \cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 0 \cdot 3}}_{1} + 1 \cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 2 \cdot 3}}_{-1} = 0$$



(b) (3 Punkte) Skizzieren Sie $H(e^{j\theta})$ für $\theta \in [-\pi, \pi]$ *Wichtig: Die volle Punktezahl wird nur bei korrekt beschrifteten Achsen zuerkannt!.*



(c) (9 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $X(e^{j\theta})$ von $x[n]$.

$$x[n] = \cos(\pi n) + 1 = a[n] + b[n]$$

$$a[n] = \cos(\pi n) \circ\!\!-\!\!\bullet \pi \delta_{2\pi}(\theta - \pi) + \pi \delta_{2\pi}(\theta + \pi)$$

$$b[n] = 1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi k) = 2\pi \delta_{2\pi}(\theta)$$

$$\Rightarrow X(e^{j\theta}) = \pi \delta_{2\pi}(\theta - \pi) + \pi \delta_{2\pi}(\theta + \pi) + 2\pi \delta_{2\pi}(\theta)$$

Hinweis: *Die folgenden beiden Teilfragen (d) und (e) lassen sich äquivalent im Frequenzbereich (bei Kenntnis von $H(e^{j\theta})$ und $X(e^{j\theta})$) und im Zeitbereich (Faltung nach Rücktransformation von $H(e^{j\theta})$ in den Zeitbereich) lösen.*

(d) (8 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $Y(e^{j\theta})$ des Systemausgangssignals $y[n]$.
Hinweis: *Zeichnen Sie zur Kontrolle die Frequenzkomponenten von $Y(e^{j\theta})$ in das Diagramm von $H(e^{j\theta})$.*

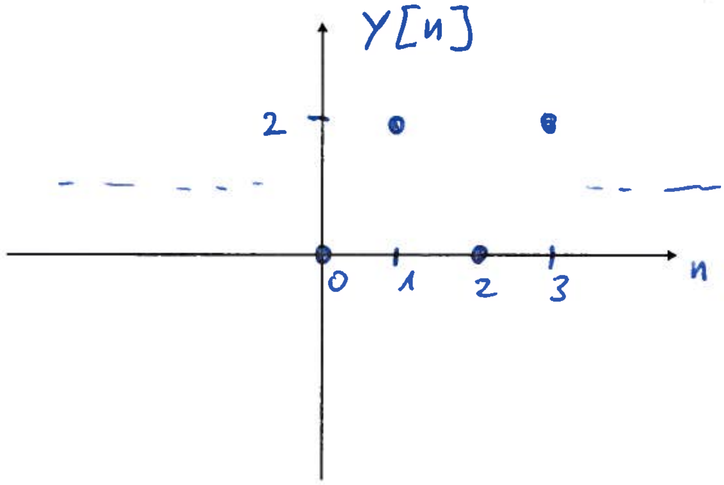
$$Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta})\,H(e^{j\theta}) =$$

$$= (-1)\cdot\left(\pi\delta_{2\pi}(\theta-\pi) + \pi\delta_{2\pi}(\theta+\pi)\right) + 1\cdot\delta_{2\pi}(\theta)\cdot 2\pi$$

(e) (6 Punkte) Berechnen und skizzieren Sie das Ausgangssignal $y[n]$ *Wichtig: Die volle Punktezahl wird nur bei korrekt beschrifteten Achsen zuerkannt!.*

Durch Vergleich von $X(e^{j\theta})$ mit $Y(e^{j\theta})$:

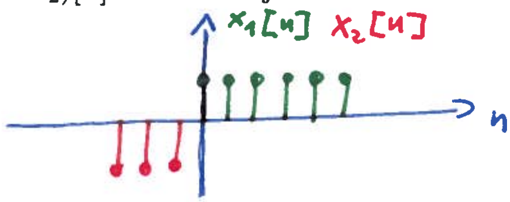
$$y[n] = 1 - \cos(\pi n)$$



Aufgabe 3: (25 Punkte)

Theorieteil "Signaleigenschaften"

(a) (10 Punkte) Gegeben sind 2 Signale $x_1[n]$, $x_2[n]$. $x_1[n]$ ist nur im Intervall $[0, 5]$ von Null verschieden, $x_2[n]$ ist nur in $[-3, -1]$ von Null verschieden. Die Faltungsoperation $y[n] = (x_1 * x_2)[n]$ ist daher jedenfalls Null **ausserhalb** des Intervalls:



A. [1,7] ○
B. [-8,0] ○
C. [-3,3] ○
D. [-3,4] ☒
E. Keine der anderen Lösungen ist richtig. ○

(b) (7 Punkte) Ein reellwertiges, gerades Signal hat folgende Eigenschaften:
A. $x[n] = -x[-n] \quad \forall n$ ○
B. $x[n+2] = x[-n-2] \quad \forall n$ ☒
C. $x[n+2] = x[-n+2] \quad \forall n$ ○
D. $x[n] = x[2n] \quad \forall n$ ○
E. Keine der anderen Lösungen ist richtig. ○

(c) (8 Punkte) Das Signal $x[n] = (-1)^n \quad \forall n$ hat:
A. eine endliche Signalleistung ☒
*B. eine endliche Signalenergie ☒
C. eine Fouriertransformierte, die eine Komponente bei $\theta = 0, \ \pm 2\pi, \ \pm 4\pi \ldots$ hat ○
D. eine Fouriertransformierte, die eine Komponente bei $\theta = \pm\pi, \ \pm 3\pi, \ \pm 5\pi \ldots$ hat ☒
E. eine Fouriertransformierte, die **keine** Komponente bei $\theta = \pm\pi, \ \pm 3\pi, \ \pm 5\pi \ldots$ hat ○

*B ist gemäß dem Satz von Parseval richtig.

Aufgabe 4: (24 Punkte)

Theorieteil "Systemeigenschaften"

(a) (4 Punkte) Bei der Parallelschaltung zweier linearer, stabiler, zeitinvarianter Systeme ist die Impulsantwort des Gesamtsystems gegeben durch:

A. das Produkt der Impulsantworten beider Systeme ○
B. die Faltung der Impulsantworten beider Systeme ○
C. die Summe der Impulsantworten beider Systeme ☒
D. die Differenz der Impulsantworten beider Systeme ○
E. keine der anderen Antworten ist richtig ○

(b) (10 Punkte) Für kausale, stabile, zeitdiskrete Systeme mit der Impulsantwort $h[n]$ bzw. Übertragungsfunktion $H(e^{j\theta})$ gilt **immer**:

A. $H(e^{j\theta}) = 0$ für $\theta < 0$ ○
B. $\sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k] = 0$ für $n < 0$ ○
C. $\sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = 0$ für $n < 0$ ○
D. $h[n] = 0$ für $n < 0$ ☒
E. $h[n] = 0$ für $n \geq 0$ ○
F. keine der anderen Antworten ist richtig ○

(c) (10 Punkte) Welche der folgenden Systeme sind stabil? ($h[n]$ ist die Impulsantwort, $H(e^{j\theta})$ ist die Übetragungsfunktion.)

A. $H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\theta}}$ ☒
B. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{3}{4}^{|k|} x[n-k]$ ☒
C. $h[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)}{\pi n} - \delta[n] \quad \forall n$ ○
D. $h[n] = \frac{1}{|n|}(-1)^n \quad \forall n$ ○
E. keines der angegebenen Systeme ist stabil ○

Raum für Nebenrechnungen

ad 2c: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\,\delta[n-2k]$

aus der Formelsammlung:

$$X(e^{j\theta}) = \frac{2\pi}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{2\pi k}{2}\right)$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \pi k)$$

ad 2d: $$Y(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta}) X(e^{j\theta}) = 2\pi \cdot \cos(\theta) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(\theta - \pi k)}_{0,\text{ für } \theta \neq \pi k}$$

$$= 2\pi\, e^{-j\theta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \pi k)$$

ad 2e: $Y(e^{j\theta}) = e^{-j\theta} X(e^{j\theta}) \Rightarrow y[n] = x[n-1]$.