ZUNAME: ....

VORNAME: ....

MAT. NR.: ....

1. SuS2-Teilprüfung **B**

Institute of Telecommunications
G. Doblinger, J. Gonter
TU-Wien 3.5.2012

> **Bitte beachten Sie:**
>
> - An schriftlichen Unterlagen darf nur die **SuS2-Formelsammlung** verwendet werden!
> - Die Beispiele ausschließlich auf den Seiten dieser Angabe ausarbeiten. **Zusatzblätter werden ignoriert!**
> - Eine **lesbare Schrift und übersichtliche Darstellung** ist eine Voraussetzung für die positive Beurteilung Ihrer Arbeit!
> - **Mobiltelefone** müssen während des Tests **ausgeschaltet** sein!

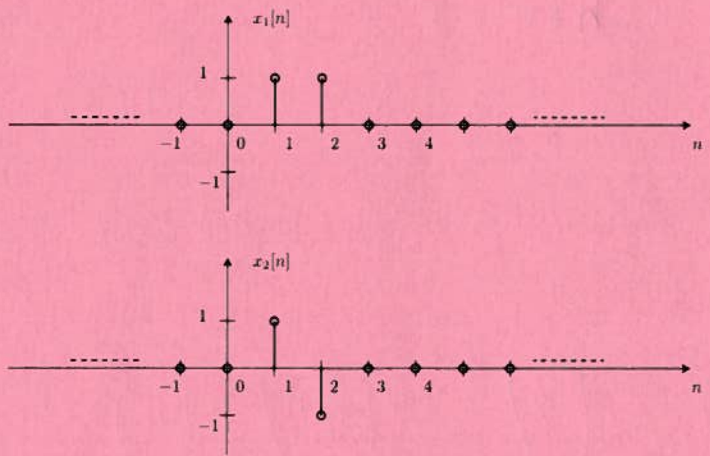
Aufgabe:	1	2	3	4	Summe
Punkte (max.):	21	30	25	24	100
Punkte:					

Aufgabe 1: (21 Punkte)

Von einem linearen, zeitinvarianten, zeitdiskreten System ist die Impulsantwort $h[n]$ gegeben:

$$h[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cos\left(\tfrac{\pi}{4}n\right)\sigma[n] \ \textit{(mit der Sprungfunktion } \sigma[n]\textit{)}$$

Das System wird mit den beiden abgebildeten Signalen angeregt:



Die Systemantwort auf $x_1[n]$ sei $y_1[n]$ und jene auf $x_2[n]$ sei $y_2[n]$. Berechnen Sie die Systemantworten $y[n]$ (die Antwort des Systems auf $x[n]$) auf die Eingangssignale:

(a) (7 Punkte) $x[n] = x_1[n] + x_2[n] = \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-1] - \delta[n-2]$

$$= 2\,\delta[n-1]$$

$$Y[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right)\delta[n-1]$$

$$= 2h[n-1]$$

(b) (7 Punkte) $x[n] = x_1[n] - x_2[n] = \delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-1] + \delta[n-2]$

$$= 2\,\delta[n-2]$$

$$Y[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}(n-2)\right)\delta[n-2]$$

$$= 2h[n-2]$$

(c) (7 Punkte) $x[n] = x_1[n+1] + x_2[n+1] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n] - \delta[n-1]$

$$= 2\,\delta[n]$$

$$Y[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\delta[n]$$

$$= 2h[n]$$

Aufgabe 2: (30 Punkte)

Ein lineares, zeitinvariantes, zeitdiskretes System wird mit einem periodischen Signal angesteuert. Die Übertragungsfunktion $H(e^{j\theta})$ des Systems sei

$$H(e^{j\theta}) = \cos(\theta)\ .$$

Das Eingangssignal $x[n]$ habe die Fourierreihendarstellung

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{j\frac{2\pi}{4}kn}$$

mit $c_0 = c_2 = -1$ und $c_1 = c_3 = 0$.

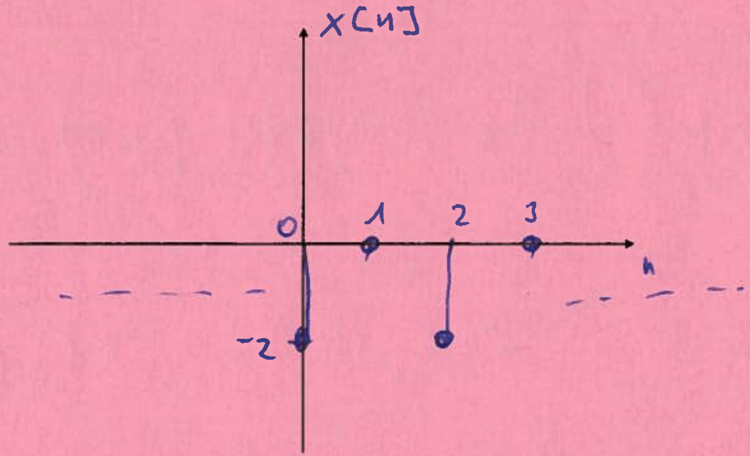
(a) (4 Punkte) Skizzieren Sie $x[n]$. *Wichtig: Die volle Punktezahl wird nur bei korrekt beschrifteten Achsen zuerkannt!*

$$x[0] = -1\cdot\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 0\cdot 0}}_{1} - 1\cdot\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot 0}}_{1} = -2$$

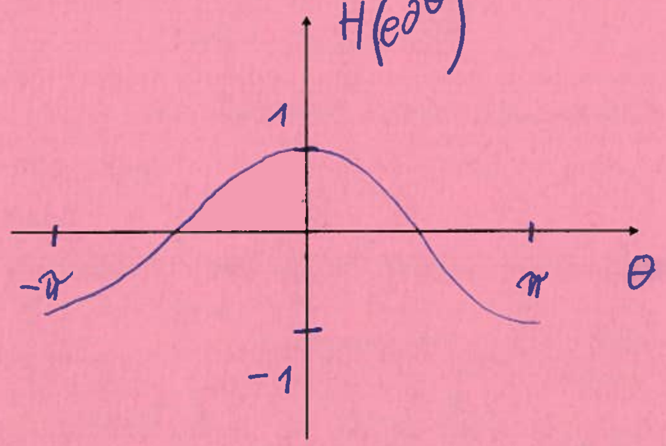
$$x[1] = -1\cdot\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 0\cdot 1}}_{1} - 1\cdot\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot 1}}_{-1} = 0$$

$$x[2] = -1\cdot\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 0\cdot 2}}_{1} - 1\cdot\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot 2}}_{1} = -2$$

$$x[3] = -1\cdot\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 0\cdot 3}}_{1} - 1\cdot\underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot 3}}_{-1} = 0$$



(b) (3 Punkte) Skizzieren Sie $H(e^{j\theta})$ für $\theta \in [-\pi, \pi]$. *Wichtig: Die volle Punktezahl wird nur bei korrekt beschrifteten Achsen zuerkannt!*



(c) (9 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $X(e^{j\theta})$ von $x[n]$.

$$x[n] = -\cos(\pi n) - 1 = -a[n] - b[n]$$

$$a[n] = \cos(\pi n) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \pi\,\delta_{2\pi}(\theta - \pi) + \pi\,\delta_{2\pi}(\theta + \pi)$$

$$b[n] = 1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi k) = 2\pi\,\delta_{2\pi}(\theta)$$

$$\Rightarrow X(e^{j\theta}) = -\pi\,\delta_{2\pi}(\theta - \pi) - \pi\,\delta_{2\pi}(\theta + \pi) - 2\pi\,\delta_{2\pi}(\theta)$$

$$= -2\pi\,\delta_{2\pi}(\theta - \pi) - 2\pi\,\delta_{2\pi}(\theta)$$

Hinweis: *Die folgenden beiden Teilfragen (d) und (e) lassen sich äquivalent im Frequenzbereich (bei Kenntnis von $H(e^{j\theta})$ und $X(e^{j\theta})$) und im Zeitbereich (Faltung nach Rücktransformation von $H(e^{j\theta})$ in den Zeitbereich) lösen.*

(d) (8 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $Y(e^{j\theta})$ des Systemausgangssignals $y[n]$.
Hinweis: *Zeichnen Sie zur Kontrolle die Frequenzkomponenten von $Y(e^{j\theta})$ in das Diagramm von $H(e^{j\theta})$.*

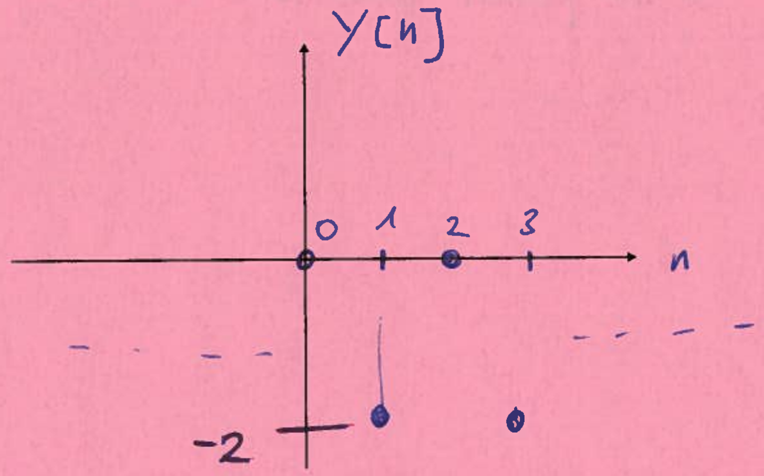
$$Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta})\, H(e^{j\theta})$$

$$= (-1) \cdot \left(-\pi \delta_{2\pi}(\theta - \pi) - \pi \delta_{2\pi}(\theta + \pi) \right) + 1 \cdot \left(-\delta_{2\pi}(\theta) \right) \cdot 2\pi$$

(e) (6 Punkte) Berechnen und skizzieren Sie das Ausgangssignal $y[n]$. *Wichtig: Die volle Punktezahl wird nur bei korrekt beschrifteten Achsen zuerkannt!*

Durch Vergleich von $X(e^{j\theta})$ mit $Y(e^{j\theta})$:

$$y[n] = \cos(\pi n) - 1$$



Aufgabe 3: (25 Punkte)

Theorieteil "Signaleigenschaften"

(a) (10 Punkte) Gegeben sind 2 Signale $x_1[n]$, $x_2[n]$. $x_1[n]$ ist nur im Intervall $[0, 5]$ von Null verschieden, $x_2[n]$ ist nur in $[1, 3]$ von Null verschieden. Die Faltungsoperation $y[n] = (x_1 * x_2)[n]$ ist daher jedenfalls Null **ausserhalb** des Intervalls:

A. [1,8] ☒
B. [-3,3] ○
C. [-7,1] ○
D. [-3,4] ○
E. Keine der anderen Lösungen ist richtig. ○

(b) (7 Punkte) Ein reellwertiges, ungerades Signal hat folgende Eigenschaften:
A. $x[n+2] = x[-n+2] \ \forall n$ ○
B. $x[n+2] = x[-n-2] \ \forall n$ ○
C. $x[n] = x[2n] \ \forall n$ ○
D. $x[n] = -x[-n] \ \forall n$ ☒
E. Keine der anderen Lösungen ist richtig. ○

(c) (8 Punkte) Das Signal $x[n] = (-1)^{n-2} \ \forall n$ hat:
* A. eine endliche Signalenergie ☒
B. eine endliche Signalleistung ☒
C. eine Fouriertransformierte, die eine Komponente bei $\theta = \pm\pi, \ \pm 3\pi, \ \pm 5\pi \ldots$ hat ☒
D. eine Fouriertransformierte, die eine Komponente bei $\theta = 0, \ \pm 2\pi, \ \pm 4\pi \ldots$ hat ○
E. eine Fouriertransformierte, die **keine** Komponente bei $\theta = \pm\pi, \ \pm 3\pi, \ \pm 5\pi \ldots$ hat ○

* A ist gemäß dem Satz von Parseval richtig.

Aufgabe 4: (24 Punkte)

Theorieteil "Systemeigenschaften"

(a) (4 Punkte) Bei der Serienschaltung zweier linearer, stabiler, zeitinvarianter Systeme ist die Impulsantwort des Gesamtsystems gegeben durch:

A. das Produkt der Impulsantworten beider Systeme ○
B. die Faltung der Impulsantworten beider Systeme ⊗
C. die Summe der Impulsantworten beider Systeme ○
D. die Differenz der Impulsantworten beider Systeme ○
E. keine der anderen Antworten ist richtig ○

(b) (10 Punkte) Für kausale, stabile, zeitdiskrete Systeme mit der Impulsantwort $h[n]$ bzw. Übertragungsfunktion $H(e^{j\theta})$ gilt **immer**:

A. $h[n] = 0$ für $n < 0$ ⊗
B. $\sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k] = 0$ für $n < 0$ ○
C. $\sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = 0$ für $n < 0$ ○
D. $h[n] = 0$ für $n \geq 0$ ○
E. $H(e^{j\theta}) = 0$ für $\theta < 0$ ○
F. keine der anderen Antworten ist richtig ○

(c) (10 Punkte) Welche der folgenden Systeme sind stabil? ($h[n]$ ist die Impulsantwort, $H(e^{j\theta})$ ist die Übetragungsfunktion.)

A. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}^{|k|} x[n-k]$ ⊗
B. $H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\theta}}$ ⊗
C. $h[n] = \frac{1}{|n|}(-1)^n \quad \forall n$ ○
D. $h[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n} - \delta[n] \quad \forall n$ ○
E. keines der angegebenen Systeme ist stabil ○

Raum für Nebenrechnungen

ad 2c: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -2 \cdot \delta[n-2k]$

mit Formelsammlung:

$$X(e^{j\theta}) = \frac{2\pi}{2} \cdot (-2) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \pi k)$$

$$= -2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \pi k)$$

ad 2d: $Y(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta}) X(e^{j\theta}) = -2\pi \cdot \cos(\theta) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(\theta - \pi k)}_{=0,\ \theta \neq \pi k}$

$$= -2\pi e^{-j\theta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - \pi k)$$

ad 2e: $Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta}) e^{-j\theta}$

$\Rightarrow y[n] = x[n-1]$