ZUNAME: ....

VORNAME: ....

MAT. NR.: ....

2. SuS2-Teilprüfung **A**

Institute of Telecommunications
G. Doblinger, J. Gonter
TU-Wien 20.6.2012

Bitte beachten Sie:

- An schriftlichen Unterlagen darf nur die **SuS2-Formelsammlung** verwendet werden!
- Die Beispiele ausschließlich auf den Seiten dieser Angabe ausarbeiten. **Zusatzblätter werden ignoriert!**
- Eine **lesbare Schrift und übersichtliche Darstellung** ist eine Voraussetzung für die positive Beurteilung Ihrer Arbeit!
- **Mobiltelefone** müssen während des Tests **ausgeschaltet** sein!

Aufgabe:	1	2	3	4	Summe
Punkte (max.):	36	18	24	22	100
Punkte:					

Aufgabe 1: (36 Punkte)

Von einem zeitdiskreten System ist die folgende Impulsantwort $h[n]$ gegeben:

$$h[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \sigma[n] \ \textit{(mit der Sprungfunktion } \sigma[n]\textit{)}$$

Mit diesem System wird ein neues System gebildet, dessen Übertragungsfunktion $G(z)$ sich durch die Transformation

$$G(z) = H\left(z^4\right)$$

aus der Übertragungsfunktion $H(z)$ des gegebenen Systems ergibt.

(a) (6 Punkte) Beweisen Sie zunächst den allgemeinen Zusammenhang

$$Y(z) = X\left(z^N\right) \Rightarrow y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{N}], & n = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

$$\left(\quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad / \quad Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] z^{-n} \quad \right)$$

$$X\left(z^N\right) \overset{!}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left[\tfrac{n}{N}\right] z^{-n}$$

subst.: $m = \frac{n}{N}$

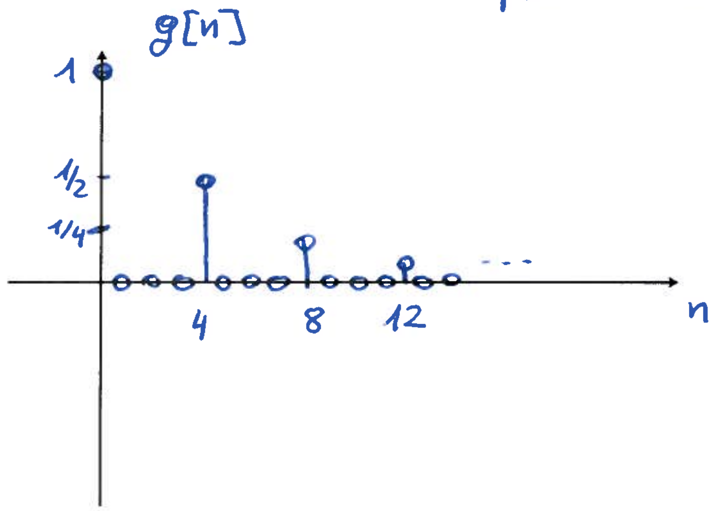
$$\sum_{m\cdot N=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m\cdot N} \xrightarrow{1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(z^N\right)^{-m}$$

(b) (4 Punkte) Verwenden Sie den Zusammenhang aus (a) zur Berechnung der Impulsantwort $g[n]$ des neuen Systems für das gegebene $h[n]$. Skizzieren Sie $g[n]$. *Wichtig: Die volle Punktezahl wird nur bei korrekt beschrifteten Achsen zuerkannt!*

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma[n] \Rightarrow g[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{N}} \sigma\left[\frac{n}{N}\right]$$

für $n = c \cdot N$, mit $c \in \mathbb{N}$

N=4:



(c) (4 Punkte) Berechnen Sie $G(z)$ aus dem gegebenen $h[n]$.

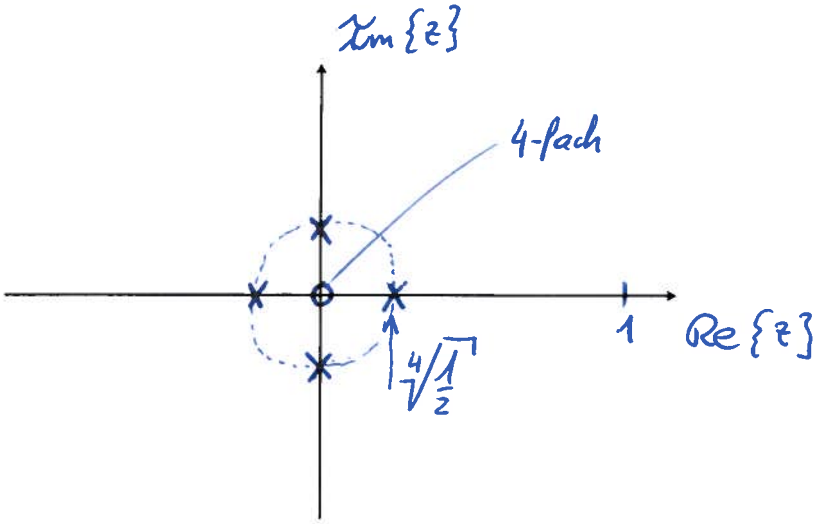
Aus Formelsammlung: $H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \Rightarrow G(z) = H(z^4) = \frac{z^4}{z^4 - \frac{1}{2}}$

(d) (6 Punkte) Skizzieren Sie das Pol-/Nullstellendiagramm von $G(z)$. *Wichtig: Die volle Punktezahl wird nur bei korrekt beschrifteten Achsen zuerkannt!*

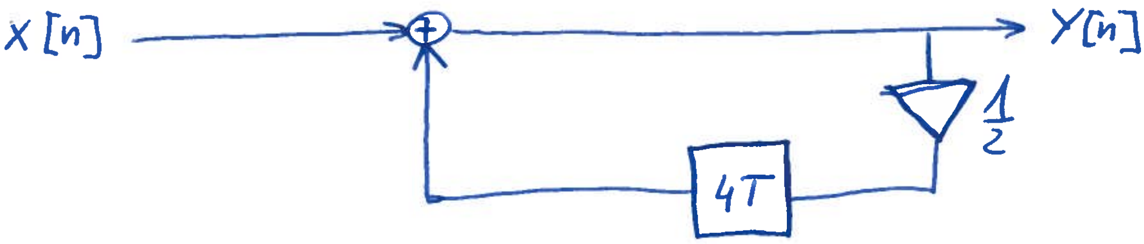
Nullstellen von $G(z)$: 4-fach bei $z = 0$

Pole von $G(z)$: $z^4 = \frac{1}{2} \xrightarrow{z^2 = l} l^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow l = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$$z_{1..4} = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \begin{array}{l} z_{1,2} = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \\ z_{3,4} = \pm j\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \end{array}$$



(e) (4 Punkte) Entwerfen Sie ein Schaltbild des neuen Systems mit der Übertragungsfunktion $G(z)$ und geben Sie die zugehörige Differenzengleichung an. *Hinweis: Die Filterkoeffizienten müssen reellwertig sein!*



$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}\, y[n-4]$$

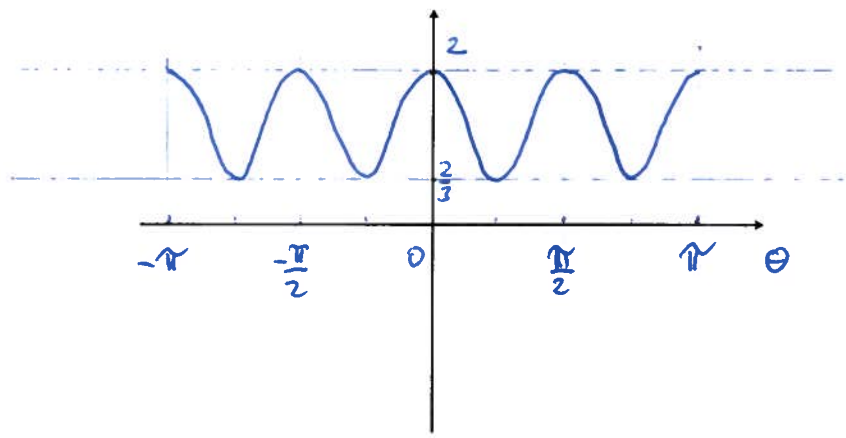
(f) (6 Punkte) Skizzieren Sie den Betragsverlauf des Frequenzgangs $|G(e^{j\theta})|$ für $\theta \in [-\pi, \pi]$ und bestimmen Sie den maximalen und den minimalen Wert von $|G(e^{j\theta})|$ für $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Aus dem Pol/Nullstellendiagramm ~~ist~~ die Lage der Maxima und Minima direkt ablesbar:

Max. bei $\theta = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi$: $|G(e^{j\theta})| = 2$

Min. bei $\theta = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$: $|G(e^{j\theta})| = \frac{2}{3}$

$|G(e^{j\theta})|$

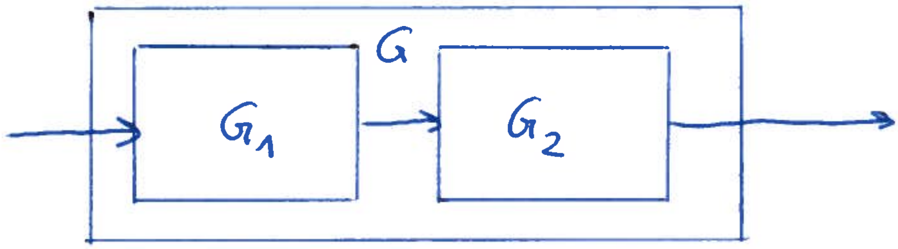


(g) (6 Punkte) Realisieren Sie $G(z)$ als Kaskadenschaltung (Kettenschaltung) zweier Filterblöcke zweiten Grades mit den Teilübertragungsfunktionen

$$G_i(z) = \frac{z^2+b_{1,i}z+b_{2,i}}{z^2+a_{1,i}z+a_{2,i}} \quad i = 1, 2$$

und berechnen Sie die Filterkoeffizienten von $G_i(z)$ für das gegebene $h[n]$. *Hinweis: Die Filterkoeffizienten müssen reellwertig sein!* Skizzieren Sie das Blockschaltbild.

$$G(z) = \frac{z^4}{z^4 - \frac{1}{2}} \Rightarrow G_1(z) = \frac{z^2}{z^2+\sqrt{\frac{1}{2}}} \qquad G_2(z) = \frac{z^2}{z^2-\sqrt{\frac{1}{2}}}$$



Aufgabe 2: (18 Punkte)

Wir wollen die diskreten Fouriertransformationen (DFTs) von zwei geraden, reellwertigen N-Punkte-Signalen $x_1[n], x_2[n]$, $n = 0 \ldots N-1$ mit einer einzigen DFT berechnen. Dazu bilden wir das komplexwertige Signal

$$y[n] = x_1[n] + jx_2[n], \quad n = 0 \ldots N-1 \; .$$

(a) (8 Punkte) Zeigen Sie, dass zwischen den DFTs $X_1[k], X_2[k]$ der Signale $x_1[n], x_2[n]$ und der DFT $Y[k]$ von $y[n]$ folgender Zusammenhang besteht:

$$X_1[k] = \Re e\{Y[k]\}, \quad k = 0 \dots N-1$$
$$X_2[k] = \Im m\{Y[k]\}, \quad k = 0 \dots N-1$$

$$Re\{Y[k]\} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[Y[n] + Y^*[-n] \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_1[n] + j x_2[n] + x_1[-n] - j x_2[-n]\right] = x_1[n] \Leftrightarrow X_1[k].$$

$$Im\{Y[k]\} \Leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[Y[n] - Y^*[-n]\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[x_1[n] + j x_2[n] - x_1[-n] + j x_2[-n]\right] = x_2[n] \Leftrightarrow X_2[k]$$

(b) (10 Punkte) Berechnen Sie die DFTs der folgenden beiden N-Punkte-Signale und prüfen Sie, ob die Zusammenhänge aus (a) erfüllt sind:

$$x_1[n] = \cos(\tfrac{2\pi}{N} n), \qquad n = 0 \dots N-1$$
$$x_2[n] = \delta[n-1] + \delta[n-N+1], \quad n = 0 \dots N-1$$

$$X_1[k] = \frac{N}{2}\delta[k-1] + \frac{N}{2}\delta[k+1-N],$$

$$X_2[k] = e^{-j\frac{2\pi k}{N}} + e^{-j\frac{2\pi k}{N}(N-1)} = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$Y[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + j\left(\delta[n-1] + \delta[n-N+1]\right)$$

$$Re\{Y[k]\} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\Big[\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + j\left(\delta[n-1] + \delta[n-N+1]\right)$$
$$+ \cos\left(-\frac{2\pi n}{N}\right) - j\left(\delta[-n-1] + \delta[-n-N+1]\right)\Big]$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \Leftrightarrow X_1[k]$$

$$\mathcal{I}m\{Y[k]\} \Longleftrightarrow \frac{1}{2j}\Big[\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)+j\left(\delta[n-1]+\delta[n-N+1]\right)$$

$$-\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)+j\left(\delta[n-1]+\delta[n-N+1]\right)\Big]$$

$$=\delta[n-1]+\delta[n-N+1] \Longleftrightarrow X_2[k].$$

Aufgabe 3: (24 Punkte)

Theorieteil "Digitale Filter"

(a) (6 Punkte) Beim FIR-Filterentwurf mit der Fenstermethode:

A. wird die Impulsantwort eines idealisierten Filters mit einem Zeitfenster gefaltet. ○

B. wird die Übertragungsfunktion eines idealisierten Filters mit der Fouriertransformation des Zeitfensters gefaltet. ☒

C. wird die Übertragungsfunktion eines idealisierten Filters mit der Fouriertransformation des Zeitfensters multipliziert. ○

D. wird die Impulsantwort in bestimmten Zeitintervallen auf Null gesetzt. ☒

E. werden die Übergangsregionen zwischen Durchlass- und Sperrbereichen im Vergleich zum idealisierten Filter größer. ☒

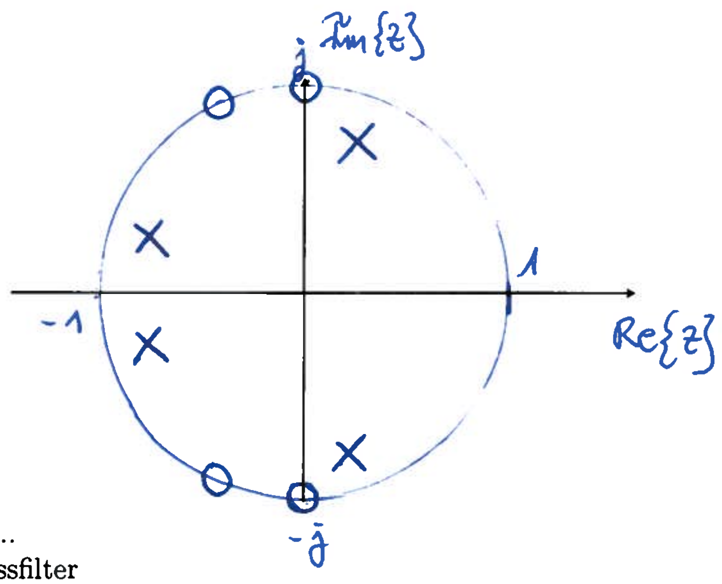
F. werden die Übergangsregionen zwischen Durchlass- und Sperrbereichen im Vergleich zum idealisierten Filter kleiner. ○

G. Keine der anderen Lösungen ist richtig. ○

(b) (6 Punkte) Die folgenden Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion eines digitalen Filters sind gegeben:

$$\text{Pole: } \tfrac{1}{4} \pm j\tfrac{3}{4},\ -\tfrac{3}{4} \pm j\tfrac{1}{4} \qquad \text{Nullstellen: } e^{\pm j\pi/2},\ e^{\pm j2\pi/3}$$

Skizzieren Sie das Pol/Nullstellendiagramm. *Wichtig: Die volle Punktezahl wird nur bei korrekt beschrifteten Achsen zuerkannt!*



Das Filter ist...

A. ein Tiefpassfilter ○
B. ein Hochpassfilter ○
C. ein Bandpassfilter ○
D. ein Bandsperrfilter ⊠
E. ein Hilberttransformator ○
F. keine der anderen Lösungen ist richtig. ○

(c) (6 Punkte) Die $\mathcal{Z}$-Transformation $X(z)$ eines linksseitigen, stabilen, zeitdiskreten Signals:

A. kann *gleichzeitig* Pole innerhalb und ausserhalb des Einheitskreises haben. ○
B. kann alle Pole im Ursprung $z = 0$ haben. ○
C. kann alle Pole in $z = \infty$ haben. ⊠
D. hat immer alle Pole ausserhalb des Einheitskreises. ⊠
E. hat immer alle Pole innerhalb des Einheitskreises. ○
F. keine der anderen Lösungen ist richtig. ○

(d) (6 Punkte) Die Differenzengleichung $y[n-2] + y[n-1] + \frac{1}{2}y[n] = x[n]$ mit Anfangsbedingungen $y[-2] = y[-1] = 0$:

A. beschreibt ein instabiles digitales Filter. ⊠
B. beschreibt ein stabiles digitales Filter. ○
C. beschreibt ein digitales Filter mit einer Impulsantwort endlicher Dauer. ○
D. beschreibt ein digitales Filter mit einer Impulsantwort unendlicher Dauer. ⊠
E. beschreibt ein digitales Filter mit linearem Phasengang der Übertragungsfunktion. ○
F. beschreibt ein digitales Filter mit nichtlinearem Phasengang der Übertragungsfunktion. ⊠
G. keine der anderen Lösungen ist richtig. ○

Aufgabe 4: (22 Punkte)

Theorieteil “diskrete Fouriertransformation (DFT)”

(a) (8 Punkte) Ein analoges (zeitkontinuierliches) Signal mit einer Dauer von 0.01 Sekunden wird mit einer Abtastfrequenz von 10 kHz abgetastet. Die Abtastwerte werden als zeitdiskretes Signal $x[n]$ gespeichert. Mit Verwendung der DFT soll das verzögerte Signal $x[n-N_d]$ erzeugt werden, mit $N_d = 10$. Dazu muss die DFT $X[k]$ von $x[n]$ berechnet werden, und zwar:

A. mit einer DFT der Länge $N = 100$ und Multiplikation von $X[k]$ mit $e^{-j\frac{2\pi}{100}k\cdot N_d}$. ○

B. mit Anfügen von 5 Nullen an $x[n]$, Verwendung einer 50-Punkte DFT und Multiplikation mit $e^{-j\frac{2\pi}{50}k\cdot N_d}$. ○

C. mit Anfügen von 10 Nullen an $x[n]$, Verwendung einer 110-Punkte DFT und Multiplikation mit $e^{-j\frac{2\pi}{110}k\cdot N_d}$. ☒

D. mit Anfügen von 10 Nullen an $x[n]$, Verwendung einer 110-Punkte DFT und Multiplikation mit $e^{-j\frac{2\pi}{100}k\cdot N_d}$. ○

E. keine der anderen Antworten ist richtig ○

(b) (6 Punkte) Für reellwertige N-Punkte Signale:

A. ist der Realteil der DFT $X[k]$ eine gerade Funktion. ☒

B. ist der Imaginärteil von $X[k]$ eine gerade Funktion. ○

C. ist der Imaginärteil von $X[k]$ null. ○

D. ist die Phase von $X[k]$ eine gerade Funktion. ○

E. ist der Betrag von $X[k]$ eine gerade Funktion. ☒

F. gilt immer $X[N-k] = X[k]$. ○

G. keine der anderen Antworten ist richtig ○

(c) (8 Punkte) Ein N-Punkte Signal mit den Eigenschaften $x[n] = x[N-1-n]$, $x[0] \neq 0$, $x[N/2] \neq 0$ (N gerade):

A. hat eine DFT $X[k]$ mit $X[0] = 0$. ○

B. hat eine DFT mit $\sum_{k=0}^{N-1} X[k] = 0$. ○

C. hat eine DFT mit $X[N/2] = 0$. ☒

D. hat eine DFT mit $\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k X[k] = 0$. ○

E. keine der anderen Antworten ist richtig ○