

ZUNAME: .....  
 VORNAME: .....  
 MAT. NR.: .....

**2. SuS2-Teilprüfung B**  
 Institute of Telecommunications  
 G. Doblinger, J. Gonter  
 TU-Wien 20.6.2012

**Bitte beachten Sie:**

- An schriftlichen Unterlagen darf nur die **SuS2-Formelsammlung** verwendet werden!
- Die Beispiele ausschließlich auf den Seiten dieser Angabe ausarbeiten. **Zusatzblätter werden ignoriert!**
- Eine **lesbare Schrift und übersichtliche Darstellung** ist eine Voraussetzung für die positive Beurteilung Ihrer Arbeit!
- **Mobiltelefone** müssen während des Tests **ausgeschaltet** sein!

Aufgabe:	1	2	3	4	Summe
Punkte (max.):	36	18	24	22	100
Punkte:					

**Aufgabe 1: (36 Punkte)**

Von einem zeitdiskreten System ist die folgende Impulsantwort  $h[n]$  gegeben:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sigma[n-1] \text{ (mit der Sprungfunktion } \sigma[n]\text{)}$$

Mit diesem System wird ein neues System gebildet, dessen Übertragungsfunktion  $G(z)$  sich durch die Transformation

$$G(z) = H(z^4)$$

aus der Übertragungsfunktion  $H(z)$  des gegebenen Systems ergibt.

(a) (6 Punkte) Beweisen Sie zunächst den allgemeinen Zusammenhang

$$Y(z) = X(z^N) \Rightarrow y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{N}], & n = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\left( X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad / \quad Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} \right)$$

$$X(z^N) \stackrel{!}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left[\frac{n}{N}\right] z^{-n}$$

Subst.:  $m = \frac{n}{N}$

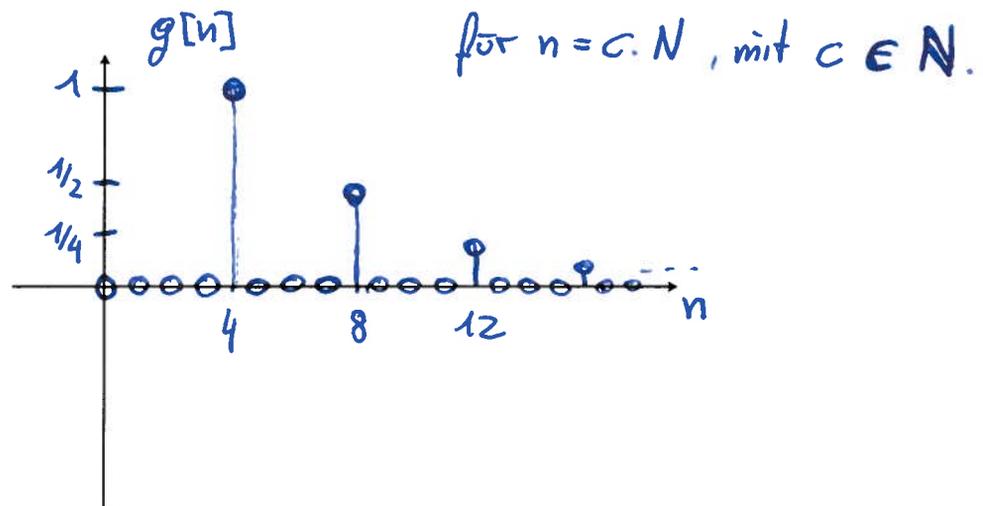
$$\sum_{m \cdot N = -\infty}^{\infty} x[m] z^{-m \cdot N}$$

$\Rightarrow$  1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(z^N\right)^{-m}$$

- (b) (4 Punkte) Verwenden Sie den Zusammenhang aus (a) zur Berechnung der Impulsantwort  $g[n]$  des neuen Systems für das gegebene  $h[n]$ . Skizzieren Sie  $g[n]$ . Wichtig: Die volle Punktezahl wird nur bei korrekt beschrifteten Achsen zuerkannt!

$$h[n]^{n-1} \sigma[n-1] \Rightarrow g[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{N}-1} \sigma\left[\frac{n}{N}-1\right]$$



- (c) (4 Punkte) Berechnen Sie  $G(z)$  aus dem gegebenen  $h[n]$ .

$$H(z) = \frac{1}{z - 1/2} \Rightarrow G(z) = H(z^4) = \frac{1}{z^4 - 1/2}$$

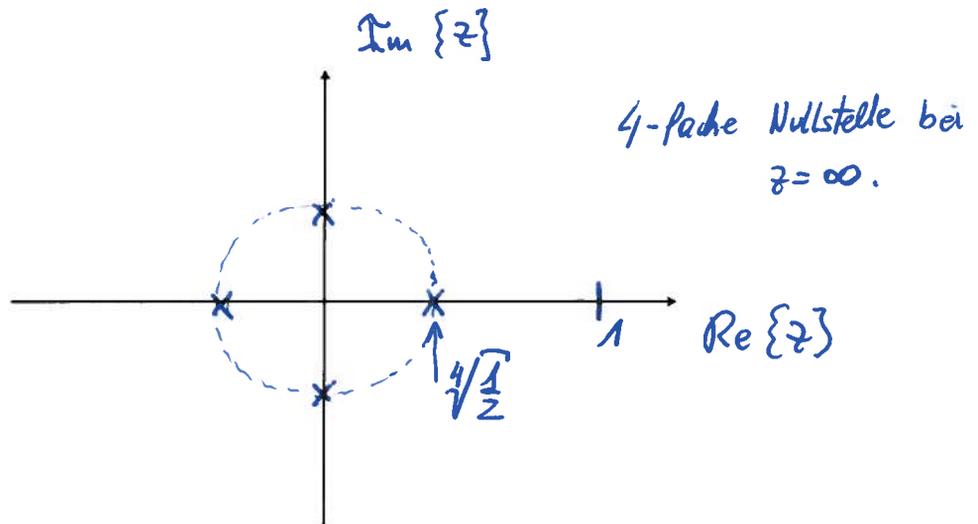
- (d) (6 Punkte) Skizzieren Sie das Pol-/Nullstellendiagramm von  $G(z)$ . Wichtig: Die volle Punktezahl wird nur bei korrekt beschrifteten Achsen zuerkannt!

Nullstelle von  $G(z)$ :  $z = \infty$

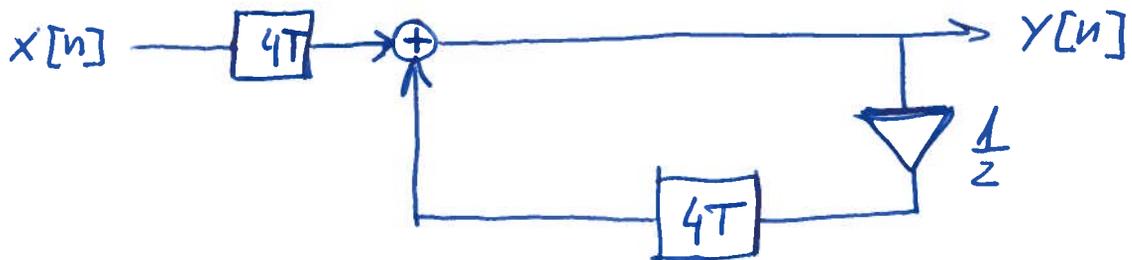
Pole von  $G(z)$ :  $z^4 = \frac{1}{2} \xrightarrow{z^2 = l} l^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\pm \sqrt{\frac{1}{2}}} \Rightarrow z_{1,2} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

$$z_{3,4} = \pm j \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$



- (e) (4 Punkte) Entwerfen Sie ein Schaltbild des neuen Systems mit der Übertragungsfunktion  $G(z)$  und geben Sie die zugehörige Differenzgleichung an. Hinweis: Die Filterkoeffizienten müssen reellwertig sein!



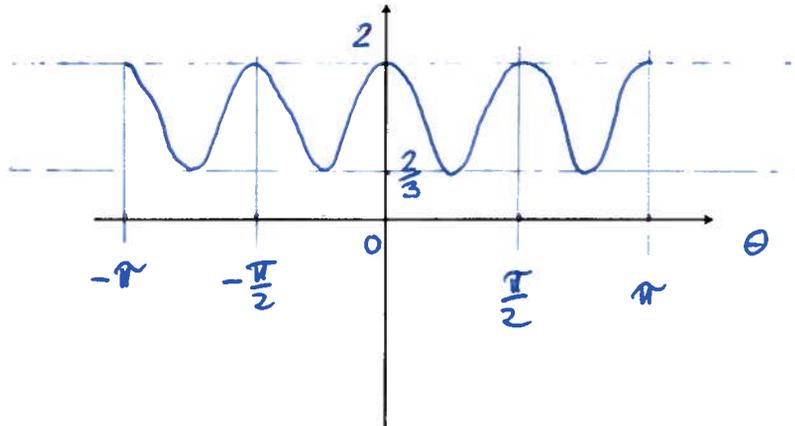
$$Y[n] = X[n-4] + \frac{1}{2}Y[n-4]$$

- (f) (6 Punkte) Skizzieren Sie den Betragsverlauf des Frequenzgangs  $|G(e^{j\theta})|$  für  $\theta \in [-\pi, \pi]$  und bestimmen Sie den maximalen und den minimalen Wert von  $|G(e^{j\theta})|$  für  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

Aus dem Pol/Nullstellendiagramm ist die Lage der Maxima und Minima direkt ablesbar:

$$\text{Max. bei } \theta = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi : |G(e^{j\theta})| = 2$$

$$\text{Min. bei } \theta = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} : |G(e^{j\theta})| = \frac{2}{3}$$

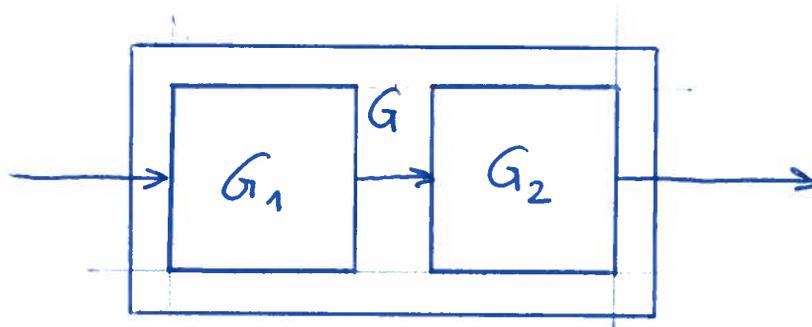


(g) (6 Punkte) Realisieren Sie  $G(z)$  als Kaskadenschaltung (Kettenschaltung) zweier Filterblöcke zweiten Grades mit den Teilübertragungsfunktionen

$$G_i(z) = \frac{z^2 + b_{1,i}z + b_{2,i}}{z^2 + a_{1,i}z + a_{2,i}} \quad i = 1, 2$$

und berechnen Sie die Filterkoeffizienten von  $G_i(z)$  für das gegebene  $h[n]$ . Hinweis: Die Filterkoeffizienten müssen reellwertig sein! Skizzieren Sie das Blockschaltbild.

$$G(z) = \frac{1}{z^4 - \frac{1}{2}} \Rightarrow G_1(z) = \frac{1}{z^2 + \sqrt{\frac{1}{2}}}, \quad G_2(z) = \frac{1}{z^2 - \sqrt{\frac{1}{2}}}$$



**Aufgabe 2: (18 Punkte)**

Wir wollen die diskreten Fouriertransformationen (DFTs) von zwei geraden, reellwertigen  $N$ -Punkte-Signalen  $x_1[n], x_2[n]$ ,  $n = 0 \dots N - 1$  mit einer einzigen DFT berechnen. Dazu bilden wir das komplexwertige Signal

$$y[n] = x_2[n] + jx_1[n], \quad n = 0 \dots N - 1.$$

- (a) (8 Punkte) Zeigen Sie, dass zwischen den DFTs  $X_1[k]$ ,  $X_2[k]$  der Signale  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$  und der DFT  $Y[k]$  von  $y[n]$  folgender Zusammenhang besteht:

$$\begin{aligned} X_1[k] &= \Im\{Y[k]\}, \quad k = 0 \dots N-1 \\ X_2[k] &= \Re\{Y[k]\}, \quad k = 0 \dots N-1 \end{aligned}$$

Da  $x_1[n]$  und  $x_2[n]$  gerade Signale sind, müssen  $X_1[k]$  und  $X_2[k]$  reell sein.

Aus der Linearität der DFT folgt

$$Y = X_2 + jX_1 \iff Y = X_2 + jX_1$$

und daher:

$$\Re\{Y[k]\} = X_2[k], \quad \Im\{Y[k]\} = X_1[k]$$

- (b) (10 Punkte) Berechnen Sie die DFTs der folgenden beiden N-Punkte-Signale und prüfen Sie, ob die Zusammenhänge aus (a) erfüllt sind:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \cos\left(\frac{2\pi}{N}2n\right), \quad n = 0 \dots N-1 \\ x_2[n] &= \delta[n-1] + \delta[n-N+1], \quad n = 0 \dots N-1 \end{aligned}$$

$$X_1[k] = \frac{N}{2} \delta[k-2] + \frac{N}{2} \delta[k+2-N]$$

$$X_2[k] = e^{-j\frac{2\pi k}{N}} + e^{-j\frac{2\pi k}{N}(N-1)} = 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$Y[n] = j \cos\left(\frac{2\pi}{N}2n\right) + \delta[n-1] + \delta[n-N+1]$$

$$\begin{aligned} \Re\{Y[k]\} &\iff \frac{1}{2} \left[ j \cos\left(\frac{4\pi}{N} \cdot n\right) + \delta[n-1] + \delta[n-N+1] \right. \\ &\quad \left. - j \cos\left(-\frac{4\pi}{N} \cdot n\right) + \delta[n-1] + \delta[n-N+1] \right] \end{aligned}$$

5

$$= \delta[n-1] + \delta[n-N+1] \iff X_2[k]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_m \{Y[k]\} &\Leftrightarrow \frac{1}{2j} \left[ j \cos\left(\frac{4\pi}{N} \cdot n\right) + \delta[n-1] + \delta[n-N+1] \right. \\ &\quad \left. + j \cos\left(-\frac{4\pi}{N} \cdot n\right) - \delta[-n-1] - \delta[-n-N+1] \right] \\ &= \cos\left(\frac{4\pi}{N} \cdot n\right) \Leftrightarrow X_1[k]. \end{aligned}$$

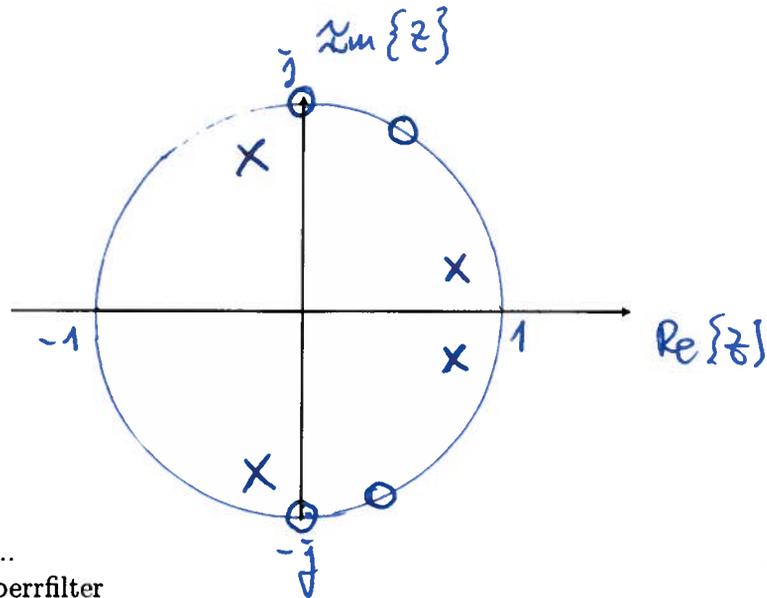
**Aufgabe 3: (24 Punkte)**

**Theorieteil "Digitale Filter"**

- (a) (6 Punkte) Beim FIR-Filterentwurf mit der Fenstermethode:
- A. wird die Impulsantwort eines idealisierten Filters mit einem Zeitfenster gefaltet.
  - B. wird die Übertragungsfunktion eines idealisierten Filters mit der Fouriertransformation des Zeitfensters multipliziert.
  - C. wird die Übertragungsfunktion eines idealisierten Filters mit der Fouriertransformation des Zeitfensters gefaltet.
  - D. werden die Übergangsregionen zwischen Durchlass- und Sperrbereichen im Vergleich zum idealisierten Filter kleiner.
  - E. werden die Übergangsregionen zwischen Durchlass- und Sperrbereichen im Vergleich zum idealisierten Filter größer.
  - F. wird die Impulsantwort in bestimmten Zeitintervallen auf Null gesetzt.
  - G. Keine der anderen Lösungen ist richtig.
- (b) (6 Punkte) Die folgenden Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion eines digitalen Filters sind gegeben:

$$\text{Pole: } -\frac{1}{4} \pm j\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \pm j\frac{1}{4} \quad \text{Nullstellen: } e^{\pm j\pi/2}, e^{\pm j\pi/3}$$

Skizzieren Sie das Pol/Nullstellendiagramm. *Wichtig: Die volle Punktezahl wird nur bei korrekt beschrifteten Achsen zuerkannt!*



Das Filter ist...

- A. ein Bandsperrfilter
- B. ein Tiefpassfilter
- C. ein Hochpassfilter
- D. ein Bandpassfilter
- E. ein Hilberttransformator
- F. keine der anderen Lösungen ist richtig.

- 
- 
- 
- 
- 
- 

(c) (6 Punkte) Die  $Z$ -Transformation  $X(z)$  eines rechtsseitigen, stabilen, zeitdiskreten Signals:

- A. hat immer alle Pole innerhalb des Einheitskreises.
- B. kann *gleichzeitig* Pole innerhalb und ausserhalb des Einheitskreises haben.
- C. kann alle Pole in  $z = \infty$  haben.
- D. hat immer alle Pole ausserhalb des Einheitskreises.
- E. kann alle Pole im Ursprung  $z = 0$  haben.
- F. keine der anderen Lösungen ist richtig.

- 
- 
- 
- 
- 
- 

(d) (6 Punkte) Die Differenzgleichung  $y[n - 2] + y[n - 1] + \frac{1}{2}y[n] = x[n]$  mit Anfangsbedingungen  $y[-2] = y[-1] = 0$ :

- A. beschreibt ein digitales Filter mit nichtlinearem Phasengang der Übertragungsfunktion.
- B. beschreibt ein stabiles digitales Filter.
- C. beschreibt ein digitales Filter mit linearem Phasengang der Übertragungsfunktion.
- D. beschreibt ein digitales Filter mit einer Impulsantwort endlicher Dauer.
- E. beschreibt ein instabiles digitales Filter.
- F. beschreibt ein digitales Filter mit einer Impulsantwort unendlicher Dauer.
- G. keine der anderen Lösungen ist richtig.

- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
-

Aufgabe 4: (22 Punkte)

Theorieteil "diskrete Fouriertransformation (DFT)"

- (a) (8 Punkte) Ein analoges (zeitkontinuierliches) Signal mit einer Dauer von 0.005 Sekunden wird mit einer Abtastfrequenz von 10 kHz abgetastet. Die Abtastwerte werden als zeitdiskretes Signal  $x[n]$  gespeichert. Mit Verwendung der DFT soll das verzögerte Signal  $x[n - N_d]$  erzeugt werden, mit  $N_d = 10$ . Dazu muss die DFT  $X[k]$  von  $x[n]$  berechnet werden, und zwar:
- A. mit Anfügen von 10 Nullen an  $x[n]$ , Verwendung einer 60-Punkte DFT und Multiplikation mit  $e^{-j\frac{2\pi}{60}k \cdot N_d}$ .
  - B. mit Anfügen von 5 Nullen an  $x[n]$ , Verwendung einer 60-Punkte DFT und Multiplikation mit  $e^{-j\frac{2\pi}{60}k \cdot N_d}$ .
  - C. mit einer DFT der Länge  $N = 50$  und Multiplikation von  $X[k]$  mit  $e^{-j\frac{2\pi}{50}k \cdot N_d}$ .
  - D. mit Anfügen von 10 Nullen an  $x[n]$ , Verwendung einer 60-Punkte DFT und Multiplikation mit  $e^{-j\frac{2\pi}{50}k \cdot N_d}$ .
  - E. keine der anderen Antworten ist richtig
- (b) (6 Punkte) Für reellwertige  $N$ -Punkte Signale:
- A. ist der Imaginärteil von  $X[k]$  null.
  - B. ist die Phase von  $X[k]$  eine ungerade Funktion.
  - C. ist der Imaginärteil von  $X[k]$  eine ungerade Funktion.
  - D. ist der Betrag von  $X[k]$  eine ungerade Funktion.
  - E. gilt immer  $X[N - k] = X[k]$ .
  - F. ist der Realteil der DFT  $X[k]$  eine ungerade Funktion.
  - G. keine der anderen Antworten ist richtig
- (c) (8 Punkte) Ein  $N$ -Punkte Signal mit den Eigenschaften  $x[n] = x[N - 1 - n]$ ,  $x[0] \neq 0$ ,  $x[N/2] \neq 0$  ( $N$  gerade):
- A. hat eine DFT mit  $\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k X[k] = 0$ .
  - B. hat eine DFT mit  $\sum_{k=0}^{N-1} X[k] = 0$ .
  - C. hat eine DFT mit  $X[N/2] = 0$ .
  - D. hat eine DFT  $X[k]$  mit  $X[0] = 0$ .
  - E. keine der anderen Antworten ist richtig