389.055: Signale and Systeme 2

Eine Einstiegshilfe

Johannes Gonter, Alexander Jung
ajung@nt.tuwien.ac.at

March 3, 2014

I. Einleitung

Sie haben bis jetzt im Studium ausschliesslich mit zeitkontinuierlichen Signalen und Systemen gearbeitet. In einer digitalen Welt lässt sich diese Annahme jedoch nicht immer aufrecht erhalten. In dieser Lehrveranstaltung lernen Sie zeitdiskrete (und wertkontinuierliche) Signale und Systeme kennen. Wie in Ihrer bisherigen Ausbildung geht diese LVA zunächst auf das "Handwerkszeug" im Umgang mit zeitdiskreten Signalen ein, um in weiterer Folge analog zu Fourier- und Laplacetransformation die Fourierreihen, die diskrete Fouriertransformation und die $\mathcal{Z}$-Transformation vorzustellen.
Um Ihnen den Einstieg in die zeitdiskrete Welt moderner digitaler Signvalverarbeitungssysteme zu vereinfachen, finden Sie auf den folgenden Seiten eine Zusammenstellung wichtiger Hinweise, mit Hilfe derer Sie die ersten drei Übungen leichter bewältigen werden. Diese Einstiegshilfe in die ersten Übungstermine ist keineswegs als Ersatz der Vorlesungsunterlagen (allen voran das Buch "Zeitdiskrete Signale und Systeme - Eine Einführung in die grundlegenden Methoden der digitalen Signalverarbeitung" von Prof. Gerhard Doblinger) zu verstehen, sondern als Ergänzung für einen erleichterten Start in den Übungsbetrieb. Alle umrissenen Hinweise finden sich detailreicher beschrieben im Buch.

II. Übergang von zeit- und wertkontinuierlichen Signalen zu zeitdiskreten und wertkontinuierlichen Signalen

Es soll das zeit- und wertkontinuierliche Signal $x(t)$ in periodischen Intervallen T_s abgetastet werden, um das zeitdiskrete aber wertkontinuierliche Signal $x[n]$ zu erhalten. Es wird das Signal $x(t)$ also nur an diskreten Zeitpunkten mit Abstand T_s betrachtet: $x[n] = x(n \cdot T_s)$. Hier ist zu beachten, dass der Zeitindex n nur ganze Zahlen annehmen kann, wir zählen quasi die Abtastvorgänge durch: $n \in \mathbb{Z} = \{-\infty, \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \infty\}$. Aus dieser Ableitung eines zeitdiskreten von einem zeitkontinuierlichen Signal ist unmittelbar einsichtig, dass zeitdiskrete Signale für $n \notin \mathbb{Z}$ nicht definiert sind.

III. Rekonstruktion des Signals $x(t)$ aus $x[n]$

Zur vollständigen Rekonstruktion des Signals $x(t)$ aus den Abtastwerten $x[n]$ muss die höchste in $x(t)$ auftretende Frequenz (Grenzfrequenz) f_g kleiner sein als die halbe Abtastfrequenz $f_s = 1/T_s$:

$$2\ f_g < f_s\ .$$

Dies ist das Abtasttheorem nach Nyquist. In der Vorlesung wird ab Kapitel 4 des Buches detailliert auf Fragestellungen bezüglich Abtastung eingegangen werden - wir setzen am Beginn der Vorlesung selbstverständlich auch kein Vorwissen voraus. Zur Lösung der Übungsbeispiele 1.4 und 1.5 sind allerdings die folgenden Illustrationen unter Umständen hilfreich. Es wird die Rekonstruktion eines Cosinus-Signals aus einem abgetasteten Signal durch Tiefpassfilterung dargestellt: im ersten Fall existieren genug Abtastwerte pro Periode des abzutastenden zeitkontinuierlichen Signals, im zweiten Fall existieren zu wenige Abtastwerte.

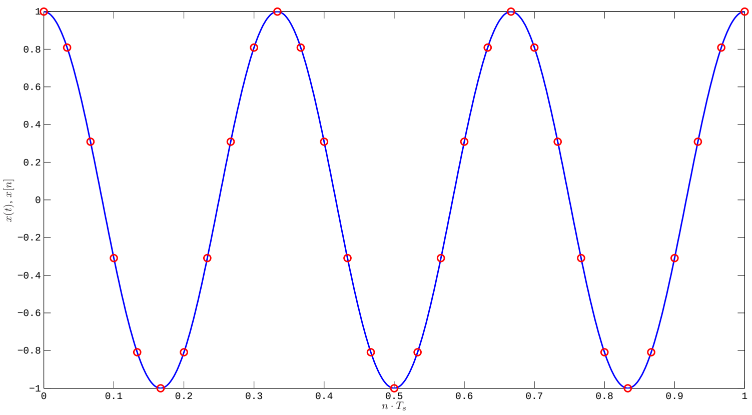

Fig. 1. Abtastung unter Beachtung des Nyquist-Theorems. Vollständige Rekonstruktion des zeitkontinuierlichen Ursprungssignals nach Tiefpass-Filterung.

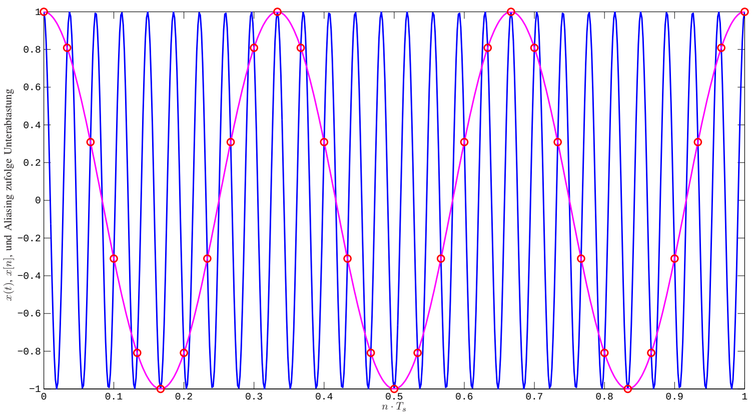

Fig. 2. Abtastung unter Verletzung des Nyquist-Theorems. Unterabtastung und daraus folgend Aliasing.

IV. Manipulationen im Argument eines zeitdiskreten Signals

Das Signal $x[n]$ sei gegeben als

$$x[n] = \begin{cases} 10 - n & 0 \leq n \leq 10 \text{ und } n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die folgenden Beispiele illustrieren den Effekt einer Transformation des Arguments n:
Achtung: $n \in \mathbb{Z}$! Für $n \notin \mathbb{Z}$ ist $x[n]$ nicht definiert und wird als 0 angenommen.

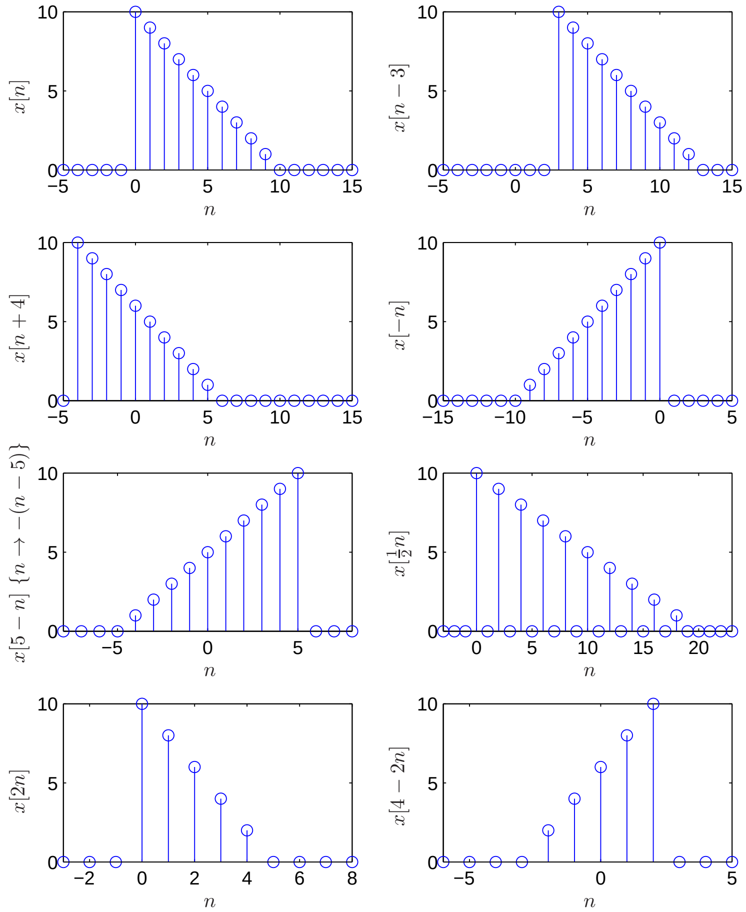

Fig. 3. Transformation des Arguments von $x[n]$ und daraus resultierende Effekte auf den Signalverlauf.

V. ERINNERUNG: GRUNDLEGENDE EIGENSCHAFTEN VON SIGNALEN UND SYSTEMEN: VGL. KAPITEL 3 DES BUCHES

Es sei $y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\}$. Das Ein-/Ausgangsverhalten des zeitdiskreten Systems wird durch den Systemoperator $\mathcal{T}$ symbolisch beschrieben:

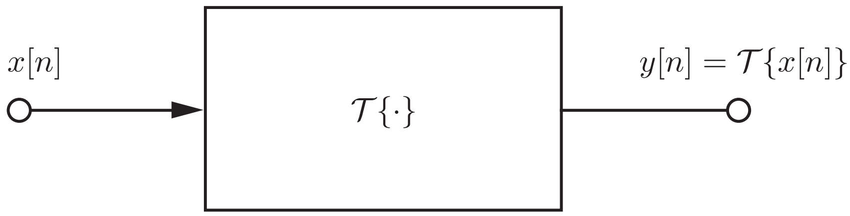

Fig. 4. Das Ausgangssignal $y[n]$ ist abhängig vom Eingangssignal $x[n]$ und vom Systemoperator $\mathcal{T}$.

- **Linearität:** eine Gewichtung der Einzelkomponenten $x_1[n]$ und $x_2[n]$ des Eingangssignals $x[n]$ mit einem Faktor a hat eine ebensolche Skalierung des Ausgangssignals $y[n]$ zur Folge.
  Es sei $y[n] = \mathcal{T}\{x_1[n] + x_2[n]\}$, dann gilt bei Linearität auch:
  $$a \cdot y[n] = \mathcal{T}\{a \cdot x_1[n] + a \cdot x_2[n]\} = a \cdot \mathcal{T}\{x_1[n]\} + a \cdot \mathcal{T}\{x_2[n]\}, \ a \in \mathbb{C}$$

- **Zeitinvarianz:** Eine Verschiebung der Eingangskomponente $x[n]$ um N_0 hat eine ebensolche Verschiebung von $y[n]$ zur Folge:
  $$y[n - N_0] = \mathcal{T}\{x[n - N_0]\} \ .$$
  Das bedeutet, dass eine zeitliche Verschiebung des Eingangs und *anschliessende* Anwendung des Systemoperators $\mathcal{T}$ denselben Effekt hat wie eine direkte Variablentransformation $n \to n - N_0$ im Argument des Ausgangssignals.

Beispiel. $y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} = x[n] + x[-n]$.

Verschiebung der Einzelkomponente *um* N_0 *nach rechts:* $\tilde{x}[n] = x[n - N_0]$

Anwenden von $\mathcal{T}\{\cdot\} : \mathcal{T}\{\tilde{x}[n]\} = \tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n] = x[n - N_0] + x[-n - N_0]$.

Verschiebung des Ausgangssignals *mittels Variablentransformation im Argument:*

$$y[n] \overset{n \to n - N_0}{=} y[n - N_0] = x[n - N_0] + x[-n + N_0] \ .$$

Keine *Gleichheit, daher liegt Zeitvarianz vor.*

- **Kausalität:** Der Systemausgang ist 0 für $n < 0$, wenn die Einzelkomponenten $x_1[n]$ und $x_2[n]$ gleich 0 sind für $n < 0$.
  $$y[n] = 0, \ \text{für } x_1[n] = 0 \text{ und } x_2[n] = 0, \ n < 0.$$

- **Stabilität:** Sei $h[n]$ die Impulsantwort eines zeitdiskreten Systems:
  $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k].$$
  Stabilität liegt vor, wenn
  $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty.$$