

1 Fourierreihen zeitkontinuierlicher period. Signale

$x(t) = x(t + T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$	\iff	$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt$
$x(t - T_0)$	\iff	$e^{-j\frac{2\pi k}{T}T_0} c_k$
$e^{j\frac{2\pi m}{T}t} x(t)$	\iff	c_{k-m}
$x^*(t)$	\iff	c_{-k}^*
$x(-t)$	\iff	c_{-k}
$x(at), \quad a > 0$	\iff	$c_k, \quad \text{Periode } \frac{T}{a}$
$\int_0^T x(\tau)y(t - \tau) d\tau$	\iff	$T c_k d_k, \quad x, y \text{ gleiche Periode}$
$x(t)y(t)$	\iff	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l d_{k-l}, \quad x, y \text{ gleiche Periode}$
$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(-t))$	\iff	$\Re\{c_k\}$
$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(-t))$	\iff	$j\Im\{c_k\}$
$\Re\{x(t)\}$	\iff	$\frac{1}{2}(c_k + c_{-k}^*)$
$j\Im\{x(t)\}$	\iff	$\frac{1}{2}(c_k - c_{-k}^*)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	\iff	$j\frac{2\pi k}{T} c_k$
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \text{ mit } c_0 = 0$	\iff	$\frac{T}{j2\pi k} c_k$

Einige Fourierreihen¹

$e^{j\frac{2\pi}{T}t}$	\iff	$\delta[k - 1]$
$\cos \frac{2\pi}{T}t$	\iff	$\frac{1}{2}\delta[k - 1] + \frac{1}{2}\delta[k + 1]$
$\sin \frac{2\pi}{T}t$	\iff	$\frac{1}{2j}\delta[k - 1] - \frac{1}{2j}\delta[k + 1]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	\iff	$\frac{1}{T} \quad \forall k$
$x(t) = \begin{cases} 1 & t \leq T_1 \\ 0 & T_1 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$	\iff	$\frac{\sin \frac{2\pi k}{T}T_1}{k\pi}$
$ \cos \frac{2\pi}{T}t \quad (\text{Periode } \frac{T}{2})$	\iff	$\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k}{1 - (2k)^2}$

¹ $\delta(t)$ ist die Diracsche Deltafunktion, $\delta[k]$ ist der Einsimpuls.

2 Fouriertransformation zeitkontinuierlicher Signale

$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$	\iff	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
$x(t - T_0)$	\iff	$e^{-j\omega T_0} X(j\omega)$
$e^{j\omega_0 t} x(t)$	\iff	$X(j(\omega - \omega_0))$
$x^*(t)$	\iff	$X^*(-j\omega)$
$x(-t)$	\iff	$X(-j\omega)$
$x(at)$	\iff	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
$(x * y)(t)$	\iff	$X(j\omega)Y(j\omega)$
$x(t)y(t)$	\iff	$\frac{1}{2\pi}(X * Y)(j\omega)$
$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(-t))$	\iff	$\Re\{X(j\omega)\}$
$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(-t))$	\iff	$j\Im\{X(j\omega)\}$
$\Re\{x(t)\}$	\iff	$X_e(j\omega) = \frac{1}{2}(X(j\omega) + X^*(-j\omega))$
$j\Im\{x(t)\}$	\iff	$X_o(j\omega) = \frac{1}{2}(X(j\omega) - X^*(-j\omega))$
$tx(t)$	\iff	$j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	\iff	$(j\omega)^n X(j\omega)$
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	\iff	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

Einige Fouriertransformationspaare

$\delta(t - T_0)$	\iff	$e^{-j\omega T_0}$
$e^{j\omega_0 t}$	\iff	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	\iff	$\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\sin \omega_0 t$	\iff	$\frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	\iff	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$	\iff	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$
$\sigma(t)$	\iff	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\text{sign}(t)$	\iff	$\frac{2}{j\omega}$
$e^{-at}\sigma(t), \quad \Re\{a\} > 0$	\iff	$\frac{1}{a + j\omega}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}\sigma(t), \quad \Re\{a\} > 0$	\iff	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$

Einige Fouriertransformationspaare (Fortsetzung)

$e^{-a t }, \quad \Re\{a\} > 0$	\iff	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$\frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$	\iff	$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & \omega < \omega_c \\ 0 & \omega > \omega_c \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} 1 & t \leq T_1 \\ 0 & t > T_1 \end{cases}$	\iff	$2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega}$
$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{T_1} & t \leq T_1 \\ 0 & t > T_1 \end{cases}$	\iff	$4 \frac{\sin^2 \frac{\omega T_1}{2}}{T_1 \omega^2}$
$e^{-at^2}, \quad a > 0$	\iff	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	\iff	$(j\omega)^n$
t^n	\iff	$2\pi j^n \frac{d^n \delta(\omega)}{d\omega^n}$
$ t $	\iff	$-\frac{2}{\omega^2}$

Dualität der Fouriertransformation

$$x(t) \iff X(j\omega)$$

$$X(jt) \iff 2\pi x(-\omega)$$

Parsevalsche Beziehung für aperiodische Signale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Parsevalsche Beziehung für periodische Signale:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Poissonsche Summenformel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

$$\text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

3 Fourierreihen zeitdiskreter periodischer Signale

$x[n] = x[n + N] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$	\iff	$c_k = c_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$
$x[n - N_0]$	\iff	$e^{-j\frac{2\pi k}{N}N_0} c_k$
$e^{j\frac{2\pi m}{N}n} x[n]$	\iff	c_{k-m}
$x^*[n]$	\iff	c_{-k}^*
$x[-n]$	\iff	c_{-k}
$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]y[n - m]$	\iff	$Nc_k d_k, \quad x, y \text{ gleiche Periode}$
$x[n]y[n]$	\iff	$\sum_{l=0}^{N-1} c_l d_{k-l}, \quad x, y \text{ gleiche Periode}$
$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	\iff	$\Re\{c_k\}$
$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	\iff	$j\Im\{c_k\}$
$\Re\{x[n]\}$	\iff	$\frac{1}{2}(c_k + c_{-k}^*)$
$j\Im\{x[n]\}$	\iff	$\frac{1}{2}(c_k - c_{-k}^*)$
$x[n] - x[n - 1]$	\iff	$(1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}) c_k$
$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \text{ mit } c_0 = 0$	\iff	$\frac{1}{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} c_k$

Einige Fourierreihen²

$e^{j\frac{2\pi m}{N}n}$	\iff	$\delta[k - m]$
$\cos \frac{2\pi m}{N}n$	\iff	$\frac{1}{2}\delta[k - m] + \frac{1}{2}\delta[k + m]$
$\sin \frac{2\pi m}{N}n$	\iff	$\frac{1}{2j}\delta[k - m] - \frac{1}{2j}\delta[k + m]$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN]$	\iff	$\frac{1}{N} \quad \forall k$
$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N_1 \\ 1 & N - N_1 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	\iff	$\frac{1}{N} \frac{\sin((2N_1 + 1)\frac{\pi k}{N})}{\sin \frac{\pi k}{N}}$

²Bei den Beziehungen ist die Periodizität von c_k mit der Periode N zu berücksichtigen.

4 Fouriertransformation zeitdiskreter Signale

$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta$	\iff	$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\theta n}$
$x[n - N_0]$	\iff	$e^{-j\theta N_0} X(e^{j\theta})$
$e^{j\theta_0 n} x[n]$	\iff	$X(e^{j(\theta-\theta_0)})$
$x^*[n]$	\iff	$X^*(e^{-j\theta})$
$x[-n]$	\iff	$X(e^{-j\theta})$
$(x * y)[n]$	\iff	$X(e^{j\theta}) Y(e^{j\theta})$
$x[n] y[n]$	\iff	$\frac{1}{2\pi} (X * Y)(e^{j\theta})$
$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	\iff	$\Re\{X(e^{j\theta})\}$
$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	\iff	$j\Im\{X(e^{j\theta})\}$
$\Re\{x[n]\}$	\iff	$X_e(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\theta}) + X^*(e^{-j\theta}))$
$j\Im\{x[n]\}$	\iff	$X_o(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\theta}) - X^*(e^{-j\theta}))$
$nx[n]$	\iff	$j \frac{dX(e^{j\theta})}{d\theta}$
$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	\iff	$\frac{1}{1 - e^{-j\theta}} X(e^{j\theta}) + \pi X(e^{j\theta}) \delta_{2\pi}(\theta)$

Einige Fouriertransformationspaare³

$\delta[n - N_0]$	\iff	$e^{-j\theta N_0}$
$e^{j\theta_0 n}$	\iff	$2\pi \delta_{2\pi}(\theta - \theta_0)$
$\cos \theta_0 n$	\iff	$\pi \delta_{2\pi}(\theta - \theta_0) + \pi \delta_{2\pi}(\theta + \theta_0)$
$\sin \theta_0 n$	\iff	$\frac{\pi}{j} \delta_{2\pi}(\theta - \theta_0) - \frac{\pi}{j} \delta_{2\pi}(\theta + \theta_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$	\iff	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta - \frac{2\pi k}{N}\right)$
$\sigma[n]$	\iff	$\frac{1}{1 - e^{-j\theta}} + \pi \delta_{2\pi}(\theta)$
$a^n \sigma[n], \quad a < 1$	\iff	$\frac{1}{1 - ae^{-j\theta}}$
$\frac{\sin \alpha n}{\pi n}, \quad 0 < \alpha < \pi$	\iff	$X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq \alpha \\ 0 & \alpha < \theta < \pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1 & n \leq N_1 \\ 0 & n > N_1 \end{cases}$	\iff	$\frac{\sin\left((2N_1 + 1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$

³Bei den Beziehungen ist die 2π -Periodizität im Frequenzbereich zu berücksichtigen. $\delta_{2\pi}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi k)$.

Parsevalsche Beziehung für aperiodische zeitdiskrete Signale:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |X(e^{j\theta})|^2 d\theta$$

Parsevalsche Beziehung für periodische zeitdiskrete Signale:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

Mit $x[n] = x[n + N]$ und den Fourierreihenkoeffizienten $c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$.

5 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

In den Beziehungen sind $x[n]$ und $y[n]$ N -Punkte Signale, d.h. sie sind für das Intervall $n \in [0, N - 1]$ definiert und besitzen daher eine endliche Länge N . Die Notation $x[(n)_N] = x[n \text{ modulo } N]$ ist die periodische Fortsetzung des N -Punkte Signals $x[n]$. Mit der Rechteckfunktion

$$\mathcal{R}_N[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{gilt} \quad x[n] = x[(n)_N] \mathcal{R}_N[n].$$

Merkregel: In den DFT-Formeln ist ein N -Punkte Signal stets als die Grundperiode ($n \in [0, N - 1]$) eines periodischen zeitdiskreten Signals zu betrachten.

$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$	\iff	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$
$x[(n - N_0)_N] \mathcal{R}_N[n]$	\iff	$e^{-j\frac{2\pi k}{N}N_0} X[k]$
$e^{j\frac{2\pi m}{N}n} x[n]$	\iff	$X[(k - m)_N] \mathcal{R}_N[k]$
$x^*[n]$	\iff	$X^*[(-k)_N] \mathcal{R}_N[k]$
$x^*[(-n)_N] \mathcal{R}_N[n]$	\iff	$X^*[k]$
$\left(\sum_{m=0}^{N-1} x[(m)_N] y[(n - m)_N] \right) \mathcal{R}_N[n]$	\iff	$X[k] Y[k]$
$x[n] y[n]$	\iff	$\left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[(m)_N] Y[(k - m)_N] \right) \mathcal{R}_N[k]$
$\frac{1}{2} [x[(n)_N] + x^*[(-n)_N]] \mathcal{R}_N[n]$	\iff	$\Re\{X[k]\}$
$\frac{1}{2} [x[(n)_N] - x^*[(-n)_N]] \mathcal{R}_N[n]$	\iff	$j\Im\{X[k]\}$
$\Re\{x[n]\}$	\iff	$\frac{1}{2} [X[(k)_N] + X^*[(-k)_N]] \mathcal{R}_N[k]$
$j\Im\{x[n]\}$	\iff	$\frac{1}{2} [X[(k)_N] - X^*[(-k)_N]] \mathcal{R}_N[k]$

Einige DFT Beispiele⁴

$e^{j\frac{2\pi m}{N}n}$	\iff	$N\delta[k - m]$
$\cos \frac{2\pi m}{N}n$	\iff	$\frac{N}{2}\delta[k - m] + \frac{N}{2}\delta[k + m - N]$
$\sin \frac{2\pi m}{N}n$	\iff	$\frac{N}{2j}\delta[k - m] - \frac{N}{2j}\delta[k + m - N]$
$\delta[n]$	\iff	1
$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N_1 \\ 1 & N - N_1 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	\iff	$\frac{\sin((2N_1 + 1)\frac{\pi k}{N})}{\sin \frac{\pi k}{N}}$

6 \mathcal{Z} -Transformation

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad \iff \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Die in der Tabelle angegebenen Bereiche sind die Konvergenzringe der zweiseitigen \mathcal{Z} -Transformation und können in einzelnen Fällen auch größer sein.

$x[n]$	\iff	$X(z)$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
$y[n]$	\iff	$Y(z)$	$R_{y_-} < z < R_{y_+}$
$ax[n] + by[n]$	\iff	$aX(z) + bY(z)$	$\max(R_{x_-}, R_{y_-}) < z < \min(R_{x_+}, R_{y_+})$
$x[n + n_0]$	\iff	$z^{n_0} X(z)$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
$z_0^n x[n]$	\iff	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$ z_0 R_{x_-} < z < z_0 R_{x_+}$
$nx[n]$	\iff	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
$x^*[n]$	\iff	$X^*(z^*)$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
$x[-n]$	\iff	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_{x_+}} < z < \frac{1}{R_{x_-}}$
$\Re\{x[n]\}$	\iff	$\frac{1}{2}(X(z) + X^*(z^*))$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
$j\Im\{x[n]\}$	\iff	$\frac{1}{2j}(X(z) - X^*(z^*))$	$R_{x_-} < z < R_{x_+}$
$(x * y)[n]$	\iff	$X(z)Y(z)$	$\max(R_{x_-}, R_{y_-}) < z < \min(R_{x_+}, R_{y_+})$
$x[n]y[n]$	\iff	$\frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{X(v)}{v} Y\left(\frac{z}{v}\right) dv$	$R_{x_-} R_{y_-} < z < R_{x_+} R_{y_+}$
$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	\iff	$\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$	$\max(R_{x_-}, 1) < z < R_{x_+}$

⁴In den Formeln gilt $0 \leq n \leq N - 1$, $0 \leq k \leq N - 1$ und $0 \leq m \leq N - 1$.

Zeitverschiebung für die einseitige \mathcal{Z} -Transformation:

$$x[n + n_0] \Leftrightarrow z^{n_0} \left(X(z) - \sum_{n=0}^{n_0-1} x[n]z^{-n} \right), \quad n_0 > 0$$

$$x[n - n_0] \Leftrightarrow z^{-n_0} \left(X(z) + \sum_{n=1}^{n_0} x[-n]z^n \right), \quad n_0 > 0$$

Residuensatz für die inverse \mathcal{Z} -Transformation:

Rechtsseitiges Signal ($x[n] = 0$ für $n < 0$):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} X(z)z^{n-1} dz = \sum_{|z_k| < R_x} \text{Res}_k \{ X(z)z^{n-1} \} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Alle Residuen im Gebiet innerhalb von \mathcal{C} werden aufsummiert, wobei der Radius von \mathcal{C} größer als der Konvergenzradius R_x sein muß.

Linksseitiges Signal ($x[n] = 0$ für $n > 0$):

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}'} X \left(\frac{1}{z} \right) z^{-n-1} dz = \sum_{|z'_k| < \frac{1}{R_x}} \text{Res}_k \left\{ X \left(\frac{1}{z} \right) z^{-n-1} \right\} \quad n = 0, -1, \dots$$

Alle Residuen im Gebiet innerhalb von \mathcal{C}' werden aufsummiert, wobei der Radius von \mathcal{C}' größer als $\frac{1}{R_x}$ sein muß.

Achtung: Durch $z^{\pm n-1}$ kann für $n = 0$ ein zusätzlicher Pol bei $z = 0$ auftreten. Daher sollte bei der inversen \mathcal{Z} -Transformation der Fall $n = 0$ getrennt behandelt werden!

Einfacher Pol $z_{\infty k}$ von $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$:

$$\text{Res}_k \{ X(z)z^{n-1} \} = \lim_{z \rightarrow z_{\infty k}} \left((z - z_{\infty k}) \frac{P(z)}{Q(z)} z^{n-1} \right)$$

M -facher Pol $z_{\infty k}$ von $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$:

$$\text{Res}_k \{ X(z)z^{n-1} \} = \frac{1}{(M-1)!} \frac{d^{M-1}}{dz^{M-1}} \left((z - z_{\infty k})^M \frac{P(z)}{Q(z)} z^{n-1} \right) \Bigg|_{z \rightarrow z_{\infty k}}$$

Residuum im Unendlichen:

$$\text{Res}_{z=\infty} \{ X(z)z^{n-1} \} = -\text{Res}_{z=0} \left\{ X \left(\frac{1}{z} \right) z^{-n-1} \right\}$$

Anfangswertsatz der einseitigen \mathcal{Z} -Transformation:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Endwertsatz der einseitigen \mathcal{Z} -Transformation:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

Eingeschaltetes periodisches Signal:

$$x[n] = x_p[n]\sigma[n] \iff X(z) = \frac{z^N}{z^N - 1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x_p[n]z^{-n} \right)$$

mit $x_p[n] = x_p[n + N]$

Einige \mathcal{Z} -Transformationspaare

$\delta[n]$	\iff	1	$\forall z$
$\sigma[n]$	\iff	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$-\sigma[-n-1]$	\iff	$\frac{z}{z-1}$	$ z < 1$
$\alpha^n \sigma[n]$	\iff	$\frac{z}{z-\alpha}$	$ z > \alpha $
$-\alpha^n \sigma[-n-1]$	\iff	$\frac{z}{z-\alpha}$	$ z < \alpha $
$n\sigma[n]$	\iff	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
$-n\sigma[-n-1]$	\iff	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z < 1$
$\sin \alpha n \sigma[n]$	\iff	$\frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$	$ z > 1$
$\cos \alpha n \sigma[n]$	\iff	$\frac{z(z - \cos \alpha)}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$	$ z > 1$
$\rho^n \sin \alpha n \sigma[n]$	\iff	$\frac{\rho z \sin \alpha}{z^2 - 2\rho z \cos \alpha + \rho^2}$	$ z > \rho$
$\rho^n \cos \alpha n \sigma[n]$	\iff	$\frac{z(z - \rho \cos \alpha)}{z^2 - 2\rho z \cos \alpha + \rho^2}$	$ z > \rho$
$\sin(\alpha n + \varphi) \sigma[n]$	\iff	$\frac{z^2 \sin \varphi + z \sin(\alpha - \varphi)}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$	$ z > 1$
$\frac{1}{n}, \quad n > 0$	\iff	$\log_e \frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$\frac{1 - e^{-\alpha n}}{n} \sigma[n]$	\iff	$\alpha + \log_e \frac{z - e^{-\alpha}}{z-1}$	$ z > 1, \alpha > 0$
$\frac{\sin \alpha n}{n} \sigma[n]$	\iff	$\alpha + \arctan \left(\frac{\sin \alpha}{z - \cos \alpha} \right)$	$ z > \cos \alpha$ $\alpha > 0$

Normierte Form der bilinearen \mathcal{Z} -Transformation

Mit

$$s = \frac{1}{v} \frac{z-1}{z+1}, \quad v = \tan \pi \frac{f_g}{f_s}$$

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1}{v} \frac{z-1}{z+1}}$$

wird ein analoges Filter mit der Übertragungsfunktion $H_a(s)$ (dabei ist $s/2\pi$ normiert auf die analoge Bezugsfrequenz f_{a_g}) in ein digitales Filter mit der Übertragungsfunktion $H(z)$ und der Bezugsfrequenz f_g übergeführt (f_s ist die Abtastfrequenz).

7 Multiratensignalverarbeitung

In den angegebenen Formeln sind der Unterabtastfaktor M und der Überabtastfaktor L ganzzahlig ($M, L \in \mathbb{N}$).

$x[n]$	\iff	$X(e^{j\theta})$ $X(z)$
$y[n] = x[Mn]$	\iff	$Y(e^{j\theta}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\theta-2\pi k)/M})$ $Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{-j2\pi k/M} z^{1/M})$
$y[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{L}] & n = 0, \pm L, \pm 2L \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	\iff	$Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta L})$ $Y(z) = X(z^L)$

Polyphasenzerlegung:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} X_k(z^M)$$

mit

$$X_k(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_k[m]z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[Mm+k]z^{-m}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

Fall $M = 2$:

$$X(z) = X_0(z^2) + z^{-1} X_1(z^2)$$

$$X_0(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[2m]z^{-m}$$

$$X_1(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[2m+1]z^{-m}$$

Elementare Vertauschungsoperationen

