VU Telekommunikation 389.138

Übung 1 (30. April – 2. Mai 2012)

Für die folgenden Beispiele sei das Rechtecksignal als

$$\mathrm{p}(t) := \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & |t| = \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

sowie die Dreiecksfunktion als

$$\Lambda(t) := \max\{1 - |t|, 0\} = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert.

Beispiel 1 – Übungsmodus

Erklären Sie den Übungsmodus und fertigen Sie einen Graphen der Punkteverteilung der Beispiele der Übung an. Fertigen Sie außerdem ein Tortendiagramm an, welches die prozentuale Verteilung zwischen Übungen, Übungstest und mündlicher Prüfung angibt. Beantworten Sie die Fragen zu folgenden Fallstudien:

1. Sie haben einen Termin bei einer Magistratsabteilung der Stadt Wien, deren Öffnungszeiten MO-FR 09:00-12:00 und 13:00-16:00 Uhr sind. Dürfen Sie von der Übung fern bleiben?
2. Bei einem Skiausflug am Wochenende haben Sie sich eine Erkältung zugezogen und liegen krank im Bett. Die Erkältung ist sehr hartnäckig und erstreckt sich über zwei Übungen. Können Sie die Lehrveranstaltung noch positiv absolvieren?
3. Nehmen Sie an, Sie arbeiten an zwei der vier Übungsterminen und wollen sich für diese entschuldigen. Ist dies möglich?
4. Sie haben Fragen zum Übungsmodus. Wo versuchen Sie zuerst Informationen zu bekommen? An welche Emailadresse wenden Sie sich, wenn Sie doch keine Informationen finden können?
5. Sie haben alle Beispiele angekreuzt, aber Ihre Tafelleistung war negativ. Dürfen Sie zum Übungstest antreten?
6. Sie haben 51% der Beispiele angekreuzt und Ihre Tafelleistung war genügend (Note 4). Dürfen Sie zum Übungstest antreten?
7. Sie haben den Übungstest positiv absolviert, aber sind beim ersten mündlichen Prüfungsantritt negativ beurteilt worden. Was können Sie tun?

Beispiel 2 – Korrelationsfunktion

Betrachten Sie das Signal
$$s(t) = \alpha\, \mathrm{p}(t-\beta),$$
mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Ermitteln Sie die Korrelationsfunktion von $s(t)$ mit dem normierten Rechteckimpuls $\mathrm{p}(t)$.
2. Berechnen Sie die Faltung zwischen $s(t)$ und dem normierten Rechteckimpuls $\mathrm{p}(t)$.
3. Berechnen und skizzieren Sie für $\alpha = \beta = 1$:
   a) die Autokorrelationsfunktion $R_s(\tau)$
   b) das Energiedichtespektrum $E_s(f)$
   c) die Selbstfaltung $(s * s)(t)$
4. Bestimmen Sie die Dekorrelationszeit T_{dk}.

Beispiel 3 – Flat Topped Sampling und Korrelation

Betrachtet wird das Signal
$$s(t) = \begin{cases} \sin(\omega t), & \text{für } 0 \le t \le T, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$
mit $\omega = 2\pi f$, $f = \frac{1}{T}$ und $T = 10\mu\mathrm{s}$. Das Signal $s(t)$ wird an den Stellen $t_i = i \cdot \frac{T}{8},\ i = 0, \ldots, 7$ abgetastet. Aus den Abtastwerten werden auf zwei Arten ein Rechtecksignal konstruiert:

1. Die Abtastwerte werden durch „Sample and hold“ zu einem Rechtecksignal der Form
$$\tilde{s}_1(t) = \sum_{i=0}^{7} s(t_i) \cdot \mathrm{p}\left(\frac{t - t_i - \frac{T}{16}}{\frac{T}{8}}\right)$$
zusammengesetzt.
2. Um die Abtastwerte wird durch ein Rechteck, jeweils zentriert um den entsprechenden Abtastwert, ein Signal der Form
$$\tilde{s}_2(t) = \sum_{i=0}^{8} s(t_i) \cdot \mathrm{p}\left(\frac{t - t_i}{\frac{T}{8}}\right)$$
aufgebaut.

Skizzieren Sie die Signale $s(t)$, $\tilde{s}_1(t)$ sowie $\tilde{s}_2(t)$ und berechnen Sie die beiden Korrelationskoeffizienten $\rho_{s,\tilde{s}_\iota}$ für $\iota = 1, 2$.

Beispiel 4 – Pulse Code Modulation

Betrachten Sie die Abtastwerte $s(t_i)$ des Signals $s(t)$ aus Beispiel 3. Die Abtastwerte sollen mit PCM codiert werden und mit Hilfe dieser Codewörter soll ein Rechtecksignal erstellt werden. Die Codewortlänge der PCM ist $n = 2$ und die Anzahl der Codeworte M gibt die möglichen PCM-Amplitudenwerte $s_1, \ldots, s_M \in [-1, 1]$ vor. Aus diesen Werten wird ein Rechtecksignal $\hat{s}_1(t)$ gebildet.

1. Skizzieren Sie das Signal $s(t)$, tragen Sie die Codewortklassen auf der Amplitudenachse ein und skizzieren Sie das dadurch konstruierte Signal $\hat{s}_1(t)$.

2. Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho_{s,\hat{s}_1}$.

3. Konstruieren und skizzieren Sie analog zu Beispiel 3.2 ein abgetastetes und quantisiertes Signal $\hat{s}_2(t)$, dessen Rechtecksignalsmittelpunktsamplituden durch das quantisierte Signal an den Zeitpunkten t_i gebildet wird.

4. Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho_{s,\hat{s}_2}$.

Beispiel 5 – PCM

Ein Audiosignal soll als linear quantisiertes PCM-Signal übertragen werden. Der Sender verwendet ein ideales Anti-Aliasing-Filter. Für volle Aussteuerung wird ein Spitzen-$\mathrm{SN_qR} \geq 50\,\mathrm{dB}$ gefordert. Durch Kanalsteuerung wird jedes millionste Bit falsch detektiert.

1. Skizzieren Sie das Blockschaltbild des PCM-Systems.

2. Wählen Sie eine geeignete Eckfrequenz des Anti-Aliasing-Filters.

3. Wie groß ist das mittlere geforderte $\mathrm{SN_qR}$, wenn das Audiosignal ein Verhältnis von Spitzenleistung zu mittlerer Leistung von $15\,\mathrm{dB}$ aufweist?

4. Welche Codewortlänge ist notwendig?

5. Welche Bitrate hat das PCM-Signal?

6. Welches tatsächliche SNR ergibt sich durch den Einfluss von Bitfehlern auf der Empfängerseite für das rekonstruierte analoge Sprachsignal?

7. Vergleichen Sie die Bandbreitenerhöhung mit dem Gewinn an SNR. Welcher Zusammenhang besteht?

Beispiel 6 – Basisbandsystem CPD

Ein Kommunikationssystem verwendet gleichwahrscheinliche Symbole, eine NRZ-Pulsform und als Detektionsverfahren CPD mit anschließender Schwellwertdetektion. Die Übertragung erfolgt über einen AWGN-Kanal.

1. Skizzieren Sie das Blockschaltbild des Kommunikationssystems.

2. Stellen Sie die Bedingung fur gleiche Bitfehlerwahrscheinlichkeit auf. Unterscheiden Sie dabei zwischen

   a) unipolarer und

   b) bipolarer

   Signalisierung.

3. Zeichnen Sie die jeweiligen Signale und erklären Sie das Ergebnis.

Beispiel 7 – Basisbandsystem Matched Filter

In einem binären Basisbandsystem wird für das 1-Bit die Kurvenform $s_1(t) = \mathrm{p}\left(10^3 t\right)$ und für das 0-Bit $s_0(t) = -\Lambda\left(2 \cdot 10^3 t\right)$ verwendet. Die Dämpfung zwischen Sender und Empfänger beträgt 40 dB.

1. Skizzieren Sie das Kommunikationssystem und die verwendeten Signale.
2. Welch ein Referenzsignal ergibt sich, wenn zur Detektion nur ein Korrelator verwendet wird?
3. Welch einen Betrag darf die spektrale Rauschleistungsdichte unter der Annahme von weißem Gaußschen Rauschen am Korrelatoreingang maximal haben, wenn die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit einen Wert von $P_S\{\mathcal{E}\} = 10^{-6}$ nicht übersteigen darf?

Beispiel 8 – Basisbandsystem mit Filter

Eine Datenverbindung wird über Coaxialkabel mit $50\,\Omega$ Wellenwiderstand realisiert. Sender und Empfänger sind ebenfalls in $50\,\Omega$-Technik ausgeführt, es werden NRZ–Pulse verwendet. Vor dem Detektoreingang wird ein LC–Tiefpassfilter verwendet, an dessen Eingang weißes, Gauß'sches Rauschen mit einer einseitigen Rauschleistungsdichte $N_0 = -160\,\mathrm{dBm/Hz}$ anliegt. Die Längsinduktivität beträgt $L = 120\,\mu\mathrm{H}$, die Querkapazität auf Detektorseite beträgt $C = 1\,\mathrm{nF}$.

1. Skizzieren Sie das System und ein Ersatzschaltbild des Filters und der treibenden und belastenden Impedanzen.
2. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Filters im System.
3. Berechnen Sie die Rauschleistung am Detektoreingang.
4. Ist das Rauschen am Eingang des Detektors weiß?
5. Ist das Rauschen am Eingang des Detektors normalverteilt?
6. Wie groß muss die Amplitude des Datensignals am Detektoreingang sein, damit sich eine Bitfehlerwahrscheinlichkeit von 10^{-6} ergibt?

Beispiel 9 – Telegrafenleitung

Eine Telegrafenleitung mit einer Impedanz von $600\,\Omega$ und einer Dämpfung von $\alpha = 2{,}5\,\mathrm{dB}/100\,\mathrm{m}$ soll zur Übertragung von digitaler Information verwendet werden. Dazu wird ein binäres Basisbandsystem mit Manchester-Codierung verwendet, wobei die Sendesignale in Abbildung 1 dargestellt sind. Die Sendeamplitude beträgt $A = 5\,\mathrm{V}$, die Symbolrate $R_\mathrm{S} = 150\,\mathrm{kbit/s}$, weiters wird ein Korrelationsempfänger eingesetzt. Die einseitige Gaußsche Rauschleistungsdichte beträgt $N_0 = -150\,\mathrm{dBm/Hz}$.

1. Skizzieren Sie das Sendesignal bei der Eingangsdatenfolge (0101100).
2. Welch ein Referenzsignal ergibt sich, wenn zur Detektion nur ein Korrelator verwendet wird?
3. Wie lang darf die Übertragungsstrecke maximal sein, wenn die Bitfehlerwahrscheinlichkeit einen Wert von $P_S\{\mathcal{E}\} = 10^{-9}$ nicht übersteigen soll?
4. Der Sendeimpulsformer des 1-Bits s_1 fällt bei sonst gleich bleibenden Parametern aus. Welche Bitfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich unter der Annahme gleichwahrscheinlicher Sendesymbole?

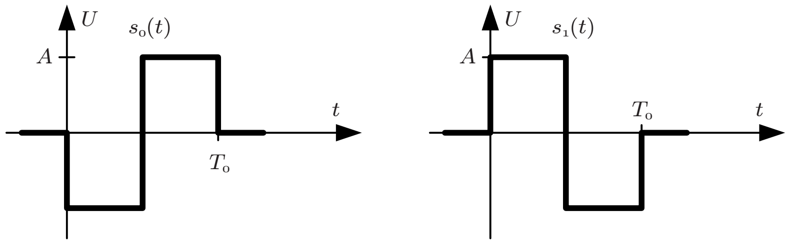

Abbildung 1: Angabe zu Beispiel 9: Manchester-Codierte Sendesignale

Beispiel 10 – Basisbandsystem Kanalimpulsantwort

Gegeben sei ein Übertragungssystem mit einem Sendeimpulsformer, welcher die Impulsantowrt

$$h_\mathrm{s}(t) = \mathrm{p}\left(\frac{t-\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right) - \mathrm{p}\left(\frac{t-\frac{3T}{4}}{\frac{T}{2}}\right)$$

besitzt, und einem Kanal mit Kanalimpulsantwort

$$h_\mathrm{k}(t) = \delta(t) - \delta(t-T).$$

Das übertragene Signal wird mit additivem gaußschen Rauschen $w(t)$ mit der zweiseitigen Leistungsdichte $\frac{N_0}{2}$ überlagert. Es soll ein optimales Empfangsfilter mit Impulsantwort $h_{\mathrm{opt}}(t)$ für eine Abtastzeit $T \in \mathbb{R}^+$ konstruiert werden, wobei der Abtaster dem Empfangsfilter folgt.

1. Skizzieren Sie das Übertragungssystem.
2. Berechnen und skizzieren Sie die Impulsantwort $h(t)$, welche aus der Kombination von Sender und Kanal hervorgeht.
3. Berechnen und skizzieren Sie die Impulsantwort $h_{\mathrm{opt}}(t)$ und die Übertragungsfunktion $H_{\mathrm{opt}}(f)$ des signalangepassten Filters.
4. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(f)$ des gesamten Übertragungssystems.
5. Ist das System ISI-frei?

Beispiel 11 – BPSK

Gegeben sei ein Kanal mit additivem weißen Rauschen, Root-Raised-Cosinus-Sende- und Empfangsfilter sowie einem Detektor. Daraus folgt die mathematische Beschreibung

$$Y = E_h X + Z.$$

Sei $E_h = 1$, X ein Sendesymbol aus dem BPSK-Sendealphabet $\{0, \ 1\}$ und Y das empfangene Signal. Z beschreibt das weiße Rauschen (statistisch unabhängig von X). Die Wahrscheinlichkeitsdichte des Rauschens ist

$$p_\mathrm{Z}(z) = c\Lambda\left(\frac{z}{2}\right)$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Um diskreten Zufallsvariablen eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zuordnen zu können und damit Berechnungen zu erleichtern wird oft die Dirac-Distribution δ verwendet. Damit lautet die Wahrscheinlichkeitsdichte des diskreten Sendesignals X

$$p_\mathrm{X}(x) = \frac{1}{4}\delta(x) + \frac{3}{4}\delta(x-1) \ .$$

1. Zeigen Sie, dass $p_{\mathrm{X}}(x)$ wirklich eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist (3 Axiome) und zeichnen Sie diese auf. Welche Eigenschaft der Dirac-Distribution wird dabei verwendet?
2. Zeichnen Sie den Verlauf von $P\{X < x\}$ auf.
3. Wie groß müssen Sie die Konstante c wählen, damit $p_{\mathrm{Z}}(z)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist?
4. Zeichnen Sie das Phasendiagramm (= Konstellations-Diagramm) von X.
5. Skizzieren Sie $p_Z(z)$.
6. Skizzieren und berechnen Sie $p_Y(y)$. Zeigen Sie, dass es sich um eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion handelt.
7. Zeichnen Sie die Dichte $p(y|1)$ (dies ist die Wahrscheinlichkeitsdichte von Y unter der Bedingung, dass 1 gesendet wurde) sowie $p(y|0)$.
8. Bei welchen Werten von Y sollte im Empfänger $\hat{X} = 1$ detektiert werden, bei welchen Werten 0?
9. Errechnen Sie mit Hilfe der Dichten die Wahrscheinlichkeiten:
   a) $P\{\hat{X} = 1|X = 1\}$
   b) $P\{\hat{X} = 1|X = 0\}$
   c) $P\{\hat{X} = 0|X = 1\}$
   d) $P\{\hat{X} = 0|X = 0\}$
   e) $P\{\mathcal{E}\}$ (Gesamtwahrscheinlichkeit eines Symbolfehlers)
10. Als Vergleich soll im Folgenden ein normalverteiltes mittelwertfreies weißes Rauschen angenommen werden ("Gaußsches Rauschen", AWGN-Kanal). Die Varianz des Rauschens $\sigma_Z^2 = 1$. Verändert sich die Entscheidung, ob eine 0 oder 1 gesendet wurde? Verändern sich die Fehlerwahrscheinlichkeiten?

Beispiel 12 – QAM

Gegeben ist eine QAM (Quadratur-Amplituden-Modulation) mit vier gleichwahrscheinlichen Symbolen

$$X \in \{1, \;\; -1, \;\; j, \;\; -j\} \; .$$

Der Kanal und das additive Rauschen sei wie in Beispiel 11.

1. Zeichnen Sie das Konstellations-Diagramm von $X \in \mathbb{C}$.
2. Zeichnen Sie die Höhenlinien der zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p_{\mathrm{Y}}(y)$ auf.
3. Geben Sie das Gebiet $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}^2$ an in der das empfangene Signal nicht liegen kann.
4. $P\{\mathcal{E}\}$ (Gesamtwahrscheinlichkeit eines Symbolfehlers) unter der Annahme, dass alle Symbole mit gleicher Wahrscheinlichkeit gesendet werden.

Beispiel 13 – Zufallsvariablen

Generell is der Erwartungswert definiert als

$$E_Z\left\{g(z)\right\} = \int g(z)\mathrm{d}P_Z(z)\ ,$$

wobei $g(z)$ eine stetige Funktion ist und die Wahrscheinlichkeitsverteilungfunktion P_Z im Allgemeinen aus drei Komponenten besteht:

$$P_Z = c_1 P_{Z,\mathrm{k}} + c_2 P_{Z,\mathrm{d}} + c_3 P_{Z,\mathrm{s}}\ , \qquad c_1 + c_2 + c_3 = 1\ .$$

$P_{Z,\mathrm{k}}$ entspricht der Verteilungsfunktion einer kontinuierlichen Zufallsvariable, $P_{Z,\mathrm{d}}$ einer diskreten und $P_{Z,\mathrm{s}}$ einer singulär-kontinuierlichen. Damit errechnet sich

$$\int g(z)\mathrm{d}P_Z = c_1 \int g(z) p_Z(z)\mathrm{d}z + \sum_\ell c_2 g(z_\ell) P\left\{Z = z_\ell\right\} + \int c_3 g(z)\mathrm{d}P_{z,\mathrm{s}}\ ,$$

wobei $p_Z(z) = \mathrm{d}P_Z(z)/\mathrm{d}z$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion darstellt. Im Folgenden seien X und Y zwei reelle statistisch unabhängige Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen

$$P_X(x) = \frac{1}{2}u\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}u\left(x - \frac{1}{2}\right)\ ,$$

$$P_Y(y) = \begin{cases} 0\ , & y \le 0\ , \\ y\ , & 0 < y < 1\ , \\ 1\ , & y \ge 1\ , \end{cases}$$

und der Sprungfunktion u.

1. Zeichnen Sie die Verteilungsfunktionen $P_X(x)$ und $P_Y(y)$ auf. Welche der beiden beschreibt eine diskrete bzw. kontinuierliche Zufallsvariable? Überprüfen Sie, ob es sich tatsächlich um Verteilungsfunktionen handelt.
2. Wie lauten die Konstanten $c_i, i = 1, 2, 3$ zur Berechnung des Erwartungswertes von X und Y? Berechnen Sie die Erwarungswerte von X und Y (dh. $g(z) = z$, z steht hier entweder für x oder y).
3. Zeichnen Sie von der diskreten Zufallsvariable die Funktion $P\left\{Z = z_\ell\right\}$ auf.
4. Zeichnen Sie von der kontinuierlichen Zufallsvariable die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion auf.
5. Berechnen Sie von den Zufallsvariablen die 2. Momente (dh. $g(z) = z^2$) bzw. die Varianzen (dh. $g(z) = z^2 - E_Z\left\{z\right\}$).
6. Geben Sie den Median von X und Y an.
7. Sei $V = X + Y$. Geben Sie den Mittelwert von V an.