VU Telekommunikation 389.138

Übung 2 (21. Mai – 23. Mai 2012)

Beispiel 1 – Quellcodierung

Eine diskrete Quelle liefert vier Symbole $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ mit den Auftrittswahrscheinlichkeiten

$$P(s_1) = \frac{3}{16}, \quad P(s_2) = \frac{1}{8}, \quad P(s_3) = \frac{1}{2}, \quad P(s_4) = \frac{3}{16}.$$

Diese sollen mit den Verfahren von Huffman codiert werden und über einen binären Kanal übertragen werden.

1. Welche Entropie besitzt die Quelle?
2. Wie groß ist die Redundanz der Quellsymbole?
3. Konstruiren Sie den Huffman-Code mit Hilfe des Code-Baumes.
   Codiervorschrift: Pfad mit höherer Wahrscheinlichkeit mit „0“, Pfad mit niedriger Wahrscheinlichkeit mit „1“ codieren.
4. Welche Code-Effizienz ergibt sich mit dem von Ihnen entworfenen Code?
5. Decodieren Sie, sofern möglich, den Datenstrom

   0011011110

   in eine Abfolge von Quellsymbolen.
6. Geben Sie eine Codierung der Quellsymbole an, die nicht eindeutig decodierbar ist.
7. Welches Codierverfahren ist nicht fortlaufend decodierbar? Geben Sie ein konkretes Beispiel an.

Beispiel 2 – Kanalcodierung

Ein binäres Signal wird über einen BSC-Kanal übertragen. Im Kanal addiert sich mittelwertfreies weißes gaußsches Rauschen zum Signal. Der Empfänger verwendet ein signalangepasstes Filter. Die Wahrscheinlichkeit eines Bitfehlers $P_b\{\mathcal{E}\} = 0{,}002$.

1. Welche Fehlerwahrscheinlichkeit des Blocks ergibt sich für einen Block von 4 Bits?
2. Welche Fehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich, wenn die vier Informationsbits bei gleichbleibender Informationsbitrate durch einen $[7, 4]$-Blockcode gesichert werden mit einer minimalen Hammingdistanz $d_{\min} = 3$?
3. Um welchen Faktor erhöht sich die Bandbreite für einen Echtzeitdienst?

Beispiel 3 – Systematischer Blockcode

Ein Codierer bildet ein Datenwort $\boldsymbol{u}$ folgendermaßen auf ein Codewort $\boldsymbol{c}$ ab:

$$\boldsymbol{u} = (u_0, u_1) \mapsto \boldsymbol{c} = (u_0, u_1, c_0, c_1, c_2), \quad u_i, c_i \in \mathrm{GF}(2) = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\},$$

wobei

$$c_0 = u_0,\ c_1 = u_1 \ \text{ und } \ c_2 = \begin{cases} 1, & \text{wenn } u_0 = 1 \vee u_1 = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der verwendete Übertragungskanal weist eine Bitfehlerwahrscheinlichkeit von $P_\mathrm{b}\{\mathcal{E}\} = 10^{-2}$ auf.

1. Welche Coderate besitzt der Code? Wie viele Codewörter existieren? Geben Sie die verwendeten Codewörter an.
2. Handelt es sich um einen systematischen Code? Handelt es sich um einen linearen Code? Begründen Sie!
3. Wie viele *beliebig* angeordnete Bitfehler können prinzipiell korrigiert und wie viele prinzipiell erkannt werden?
4. Konstruieren Sie eine Maximum-Likelihood-Decodiertabelle und berücksichtigen Sie nur Wörter mit der Hammingdistanz zu den Codewörtern von $d < 2$. Kreisen Sie die Worte ein, bei denen der Fehler detektierbar ist und unterstreichen Sie die korrigierbaren Wörter anhand der Maximum-Likelihood-Decodiertabelle. Erklären Sie die scheinbare Diskrepanz zu Punkt 3. Verwenden Sie folgendes generelle Schema der Maximum-Likelihood-Decodiertabelle:

Codewörter ($d = 0$)	000000	$\cdots$	$\cdots$
$d = 1$	100000	$\cdots$	$\cdots$
	010000	$\cdots$	$\cdots$
	001000	$\cdots$	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$d = 2$			
$\vdots$			

5. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erkennt der Decoder die Fehler im Block nicht? Begründen Sie Ihren Rechengang.

Beispiel 4 – Syndromdecodierung

Betrachten Sie einen systematischen linearen Blockcode über $\mathrm{GF}(2) = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, der einen binären Datenstrom gegen Übertragungsfehler sichert. Die Generatormatrix lautet

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Geben Sie die Paritätsgleichungen an und bestimmen Sie die Coderate R.
2. Bestimmen Sie die Prüfmatrix $\mathbf{H}$.
3. Skizzieren Sie eine schaltungstechnische Realisierung des Codewortes.

4. Bestimmen Sie die minimale Hamming-Distanz $d_{\min}$ und das minimale Hamming-Gewicht $w_{\min}$.
5. Bestimmen Sie die garantierte Anzahl an korrigierbaren Fehler im Codewort.
6. Bestimmen Sie die garantierte Anzahl an erkennbaren Fehler im Codewort, wenn keine Fehlerkorrektur vorgesehen ist.
7. Führen Sie eine Syndrom-Dekodierung des empfangenen Vektors $\boldsymbol{r}$ durch, mit
$$\boldsymbol{r} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0).$$
8. Verändern Sie die Liste der Codewörter so, dass der Code nicht mehr linear ist und verifizieren Sie dies.

Beispiel 5 – Faltungscode

Ein Datenstrom mit Symbolen $\mathrm{GF}(2) = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ wird mit Hilfe eines Faltungscodes gesichert. Der Coder verwendet die Polynome

$$p_1(x) = 1 + x + x^2 \quad \text{und} \quad p_2(x) = 1 + x^2.$$

Es wird ein Informationsbit pro Zeittakt in den Codierer geladen, wobei an Datenblöcke von jeweils 3 Bits zwei 0-Bits angehängt werden, um den Coder in einen definierten Ausgangszustand zu bringen. Am Ausgang des Kommunikationssystems wird das Datenwort $\boldsymbol{r} = (1, 1, 1, 1, X, 0, 0, 0, X, 1)$ empfangen - Wobei X vom Entscheider nicht eindeutig entschieden werden konnte.

1. Welche Coderate besitzt der Code?
2. Zeichnen Sie den Codebaum des Encoders.
3. Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm des Encoders.
4. Zeichnen Sie das Trellisdiagramm des Encoders.
5. Decodieren Sie mit Hilfe des Viterbialgorithmus die empfangenen Daten.
6. Statt 3 Bits werden 452 Bits in einem Block übertragen. Welche Datenfolge ergibt sich wenn die gegebene Empfangsfolge als Beginn dieses Blocks interpretiert wird?

Beispiel 6 – Linearer Blockcode

Betrachten Sie einen $[6,3]$ systematischen linearen Blockcode über $\mathrm{GF}(2) = \mathbb{F}_2 = \{0,1\}$. Der Aufbau eines Codeworts ist durch

$$\boldsymbol{c} = (I_1, I_2, I_3, P_1, P_2, P_3)$$

gegeben. Die Paritätsgleichungen sind durch

$$P_1 = I_1 + I_2 \qquad P_2 = f(I_1, I_2, I_3) \qquad P_3 = I_1 + I_3$$

festgelegt. Dabei ist P_3 durch eine noch zu bestimmende Funktion f angegeben. Die Prüfmatrix (Checkmatrix) $\mathbf{H}$ ist gegeben als

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad h_{31}, h_{32}, h_{33} \in \mathbb{F}_2.$$

1. Stellen Sie die zweite Paritätsgleichung aus und bestimmen Sie die Prüfmatrix $\mathbf{H}$ vollständig.
2. Skizzieren Sie die schaltungstechnische Realisierung der Paritätsbits im Codewort.
3. Stellen Sie die Generatormatrix $\mathbf{G}$ auf.
4. Berechnen Sie alle Codewörter. Geben Sie eine Formel für die Anzahl der Codewörter an und bestimmen Sie diese.
5. Bestimmen Sie die minimale Hamming-Distanz d_{min} und das minimale Hamming-Gewicht w_{min}.
6. Wie groß darf das Hamming-Gewicht des Fehlervektors maximal sein um den auftretenden Fehler sicher korrigieren zu können?
7. Führen Sie eine Syndrom-Decodierung des empfangenene Vektors

   $$\boldsymbol{r} = (1,0,1,0,0,0)$$

   durch.
8. Wie sieht für die Informationsbits (I_1, I_2, I_3) ein *Single Parity Check Code* für gerade Parität aus? Zeigen Sie, dass dieser Code ein linearer Blockcode ist.

Beispiel 7 – Faltungscode

Ein Datenstrom mit Symbolen $\mathrm{GF}(2) = \mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ wird mit Hilfe eines Faltungscodes gesichert. Der Coder verwendet die Polynome

$$p_1(x) = x + x^2, \quad p_2(x) = 1 + x^2 \quad \text{und} \quad p_3(x) = 1 + x.$$

Es wird ein Informationsbit pro Zeittakt in den Codierer geladen. Am Ausgang eines Kommunikationssystems wird das Datenwort $\boldsymbol{r} = (0,1,0,1,0,0,1,0,1)$ empfangen. Zu Beginn befindet sich der Decoder im 00-Zustand.

1. Welche Coderate besitzt der Code?
2. Zeichnen Sie den Codebaum des Encoders.
3. Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm des Encoders.
4. Zeichnen Sie das Trellisdiagramm des Encoders.
5. Decodieren Sie mit Hilfe des Viterbialgorithmus die empfangenen Daten.

Beispiel 8 – Zweidimensionaler Blockcode

Gegeben sei ein Blockcode über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_2 = \{0,\ 1\}$ mit einer zweidimensionalen Paritätskontrolle (engl.: array code) wie in folgendem Tableau:

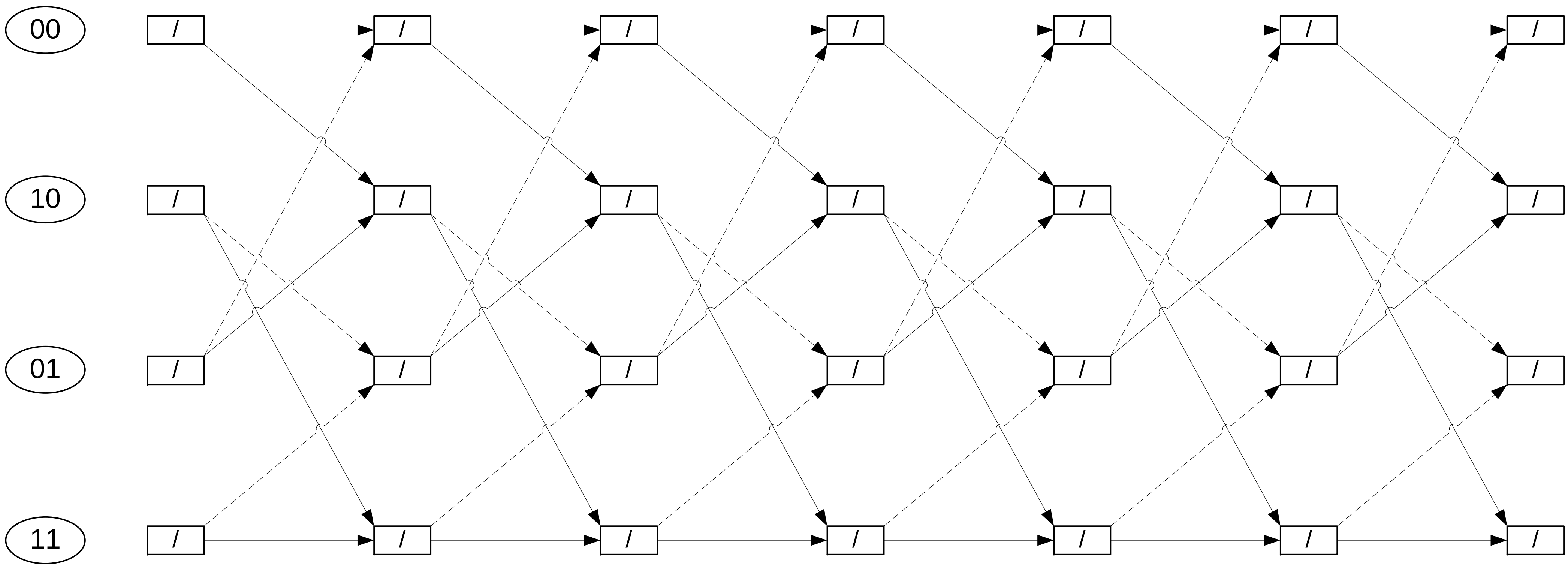
$$\begin{array}{cc|c} I_1 & I_2 & P_1 \\ I_3 & I_4 & P_2 \\ \hline P_3 & P_4 & P_5 \end{array}$$

Die Paritäten $P_i, i = 1, 2$ errechnen sich aus der jeweiligen Zeilensumme der Informationsbitts I_j, $P_i, i = 3, 4$ aus der jeweiligen Spaltensumme und P_5 aus der Summe der Paritätsbits $P_1, \cdots, P_4$. Übertragen wird der Codevektor

$$\mathbf{c} = (I_1, \cdots, I_4, P_1, \cdots, P_5)\ .$$

Durch das Rauschen des Übertragungskanals ergibt sich eine Bitfehlerwahrscheinlichkeit von $P_\mathrm{b} = 10^{-3}$ des empfangenen Signals.

1. Schreiben Sie die Codewörter. Geben Sie das minimale Hamming-Gewicht und die minimale Hamming-Distanz an.
2. Ist dieser Code systematisch bzw. linear? Handelt es sich um einen zyklischen Code? Bestimmen Sie die Coderate.
3. Stellen Sie die Generatormatrix $\mathbf{G}$ und die Checkmatrix $\mathbf{H}$ auf.
4. Berechnen Sie die folgenden Fehlerwahrscheinlichkeiten des Empfangsvektors:
   a) $P\{\text{korrekter Empfangsvektor}\}$
   b) $P\{\text{1 Bit im Empfangvektor falsch}\}$
   c) $P\{\text{2 Bits im Empfangvektor falsch}\}$
   d) $P\{< \text{3 Bits im Empfangvektor falsch}\}$
   e) $P\{\text{0 Bit im Empfangvektor richtig}\}$
   f) $P\{> \text{2 Bits im Empfangvektor falsch}\}$
   g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Block falsch detektiert wird?
5. Wieviele Bitfehler können korrigiert werden?


00
10
01
11