389.138 Telekommunikation – 2014S
1. Übung

07.04.2014 – 11.04.2014

Einen Überblick über die in der Übung verwendete Notation finden Sie in TUWEL.

Beispiel 1 — Zwei diskrete Zufallsvariablen

Sie würfeln zweimal mit einem fairen, sechsseitigen Würfel. Es sei X die Anzahl der Einser und Y die Anzahl der Zweier, die nach zwei Würfen aufgetreten sind.

(a) Erstellen Sie eine Tabelle der Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(x,y) = \mathrm{P}\{\mathsf{X} = x \wedge \mathsf{Y} = y\}$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{P}\{\mathsf{X} + \mathsf{Y} > 0\}$.

(c) Berechnen Sie Kovarianz $C_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}$ von X und Y.

(d) Interpretieren Sie den Wert der Kovarianz. Was sagt das Vorzeichen aus?

Beispiel 2 — Schätzen einer Zufallsgröße

Ihnen wird die Aufgabe gestellt, den Wert der reellen Zufallsvariable Z zu schätzen, wobei sich Z aus der Summe von X und Y ergibt. X und Y sind unabhängige Zufallsvariablen mit

$$f_{\mathsf{X}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 2 \le x < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \mathrm{P}\{\mathsf{Y} < y\} = F_{\mathsf{Y}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0 \\ y & \text{für } 0 \le y < 1 \\ 1 & \text{für } y \ge 1 \end{cases}.$$

(a) Fertigen Sie eine Skizze von $f_{\mathsf{Z}}(z)$ an und finden Sie einen Formelausdruck.

(b) Finden Sie einen Schätzwert $\hat{z} \in \mathbb{R}$, der den mittleren quadratischen Fehler minimiert. D.h.,

$$\hat{z} = \arg\min_{r \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left[(\mathsf{Z} - r)^2\right].$$

Hinweis: $x^\star = \arg\min_{x \in \mathcal{X}} f(x)$ *liefert einen Wert* $x^\star \in \mathcal{X}$ *sodass* $f(x^\star) \le f(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}$.

(c) Geben Sie $\mathrm{P}\{\mathsf{Z} = \hat{z}\}$ an, die Wahrscheinlichkeit, dass der geschätzte Wert tatsächlich auftritt.

(d) Sie sollen nun mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.5 richtig liegen. Erweitern Sie dazu den Schätzwert $\hat{z}$ zum Schätzer „Z *liegt zwischen* $\hat{z} - \Delta$ *und* $\hat{z} + \Delta$." ($\hat{z}$ aus Unterpunkt (b)). Geben Sie den kleinstmöglichen Wert für Δ an, der den Anforderungen genügt.

(e) Mit welchen Werten Δ würden Sie garantiert richtig liegen?

Beispiel 3 — Fehlerwahrscheinlichkeit

Ein Basisbandübertragungssystem überträgt die Sendesymbole $\mathsf{X} \in \{-1, 1\}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}\{\mathsf{X} = -1\} = 1/3$ und $\mathrm{P}\{\mathsf{X} = 1\} = 2/3$. Während der Übertragung wird additives Rauschen N überlagert, welches gemäß

$$f_{\mathsf{N}}(n) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^2 + 1}$$

verteilt und unabhängig von X ist. Somit ergibt sich das Empfangssymbol zu

$$\mathsf{Y} = \mathsf{X} + \mathsf{N}\,.$$

(a) Berechnen und skizzieren Sie $f_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y|x=-1)\mathrm{P}\{\mathsf{X}=-1\}$, $f_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y|x=1)\mathrm{P}\{\mathsf{X}=1\}$ sowie $f_{\mathsf{Y}}(y)$.

(b) Um die Fehlerwahrscheinlichkeit zu minimieren entscheidet der Empfänger für einen detektierten Wert y den geschätzten Wert $\hat{x}(y)$ gemäß

$$\hat{x}(y) = \underset{x\in\{-1,1\}}{\arg\max}\left\{f_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y|x)\mathrm{P}\{\mathsf{X}=x\}\right\}$$

(Bayes's decision criterion). Markieren Sie in der in (a) angefertigten Skizze jene Regionen wo $\hat{x}=1$ bzw. $\hat{x}=-1$ entschieden wird. Wo liegen die Grenzen zwischen diesen Regionen (Entscheidungsschwellwerte)? Wie lässt sich das Ergebnis interpretieren?

(c) Berechnen Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit, wenn der Empfänger die Entscheidungsregionen aus (b) verwendet.

Beispiel 4 — Fehlerwahrscheinlichkeit AWGN Kanal

(a) Angabe wie in Beispiel 3, mit den Änderungen $\mathsf{X} \in \{-v, v\}$, $\mathrm{P}\{\mathsf{X}=-v\} = \mathrm{P}\{\mathsf{X}=v\} = 1/2$ und

$$f_{\mathsf{N}}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-n^2/(2\sigma^2)}.$$

Verwenden Sie in Ihren Lösungen die $\mathcal{Q}$-Funktion.

(b) Lösen Sie folgende Gleichungen mithilfe des Nomogramms der $\mathcal{Q}$-Funktion:

(i) $5x = \mathcal{Q}(4)$ (ii) $x = \frac{1}{2}\big(1-\mathrm{erf}(3)\big)$ (iii) $10^{-5} = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(5x)$

Beispiel 5 — MIMO Kanal

Abbildung 1 zeigt eine MIMO Funkstrecke mit N_{TX} Sendeantennen und N_{RX} Empfangsantennen. Das Empfangssignal an Antenne i ergibt sich zu

$$r_i(t) = \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{TX}}}(h_{i,j} * s_j)(t)\,. \tag{1}$$

(a) Es sei $N_{\mathrm{TX}} = N_{\mathrm{RX}} = 2$, $s_1(t) = -s_2(t) = \mathrm{rect}(t-0.5)$ sowie

$$h_{1,1}(t) = 0.4\delta(t-0.3) + 0.2\delta(t-2.5), \qquad h_{1,2}(t) = -3\delta(t-3) + 0.2\delta(t-5),$$
$$h_{2,1}(t) = 1.5\delta(t-0.5) + 0.5\delta(t-1), \qquad h_{2,2}(t) = 0.5\delta(t-1) - \delta(t-1.5).$$

Berechnen und skizzieren Sie $r_2(t)$. Erklären Sie qualitativ die Ursprünge der Interferenz im Empfangssignal $r_2(t)$.

(b) Betrachten Sie im Weiteren den dispersionsfreien Fall $h_{i,j}(t) = H_{i,j}\delta(t)$. Geben Sie unter Berücksichtigung von (1) eine kompakte Darstellung an, in der alle Sende- mit allen Empfangssignalen verknüpft werden.

(c) Anstatt $s_i(t)$ direkt zu übertragen, werden die Signale im Sender vor der Übertragung linear miteinander kombiniert und die resultierenden Signal $s'_i(t)$ gesendet. Finden Sie $\mathbf{P} : \mathbf{s}(t) \mapsto \mathbf{s}'(t)$, sodass keine Interferenz auftritt (d.h. $r_i(t) = s_i(t)$). Welche Eigenschaften muss der Kanal dazu erfüllen?

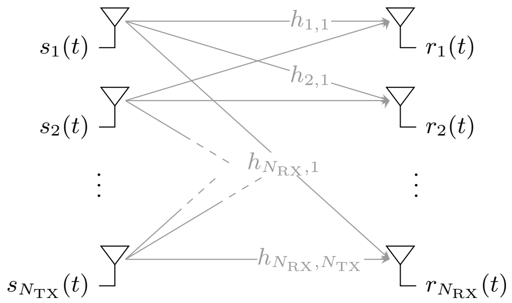

Abbildung 1: Linearer, zeitinvarianter MIMO Kanal

Beispiel 6 — Kreuzkorrelation, Signalenergie und Fehlerwahrscheinlichkeit
Betrachten Sie die Funktionen

$$\begin{aligned} s_1(t) &= -a\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-a}{2a}\right), \\ s_2(t) &= a\sin\left(\pi\frac{t}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t-a}{2a}\right), \\ s_3(t) &= a\big(1-(t/a-1)^2\big)\mathrm{rect}\left(\frac{t-a}{2a}\right), \end{aligned}$$

mit $a > 0$.

(a) Skizzieren Sie die Funktionen.

(b) Ermitteln Sie die Signalenergien E_1, E_2 und E_3.

(c) Berechnen und skizzieren Sie die normierte Kreuzkorrelationsfunktion $\rho_{12}(\tau)$ von $s_1(t)$ und $s_2(t)$. Bestimmen Sie weiters die Korrelationskoeffizienten $\rho_{12}(0)$ und $\rho_{13}(0)$ (Korrelationskoeffizient von $s_1(t)$ und $s_3(t)$).

(d) Betrachten Sie nun ein binäres Übertragungssystem mit den Sendeimpulsen $s_1(t)$ und $s_2(t)$, sowie einem Matched Filter Empfänger. Das System wird durch AWGN mit einer spektralen Leistungsdichte von $N_0 = 10^{-7}$ gestört. Finden Sie das kleinstmögliche $a > 0$, sodass die Fehlerwahrscheinlichkeit $\mathrm{P}\{\mathcal{E}\} \le 10^{-9}$ ist.

Beispiel 7 — Fouriertransformation
Der Autor von Buch 1 definiert die Fouriertransformation und ihre Inverse als

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1\big\{x(t)\big\} &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = X_1(\mathrm{j}\omega), \\ \mathcal{F}_1^{-1}\big\{X_1(\mathrm{j}\omega)\big\} &\triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega = x(t). \end{aligned}$$

Der Autor von Buch 2 hingegen verwendet nicht die Kreisfrequenz ω sondern die Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ in seiner Definition:

$$\mathcal{F}_2\{x(t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}t = X_2(f),$$
$$\mathcal{F}_2^{-1}\{X_2(f)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} X_2(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}f = x(t).$$

(a) Stellen Sie den Zusammenhang zwischen zwischen X_1 und X_2 her.

(b) Zeigen Sie, dass beide Definitionen, $i = 1, 2$ $\mathcal{F}_i^{-1}\Big\{\mathcal{F}_i\{x(t)\}\Big\} = x(t)$ erfüllen.
Hinweis: $\delta(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$

(c) In Buch 2 findet sich außerdem eine Fouriertabelle mit dem Zusammenhang

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-T}{\tau}\right) \overset{\mathcal{F}_2}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \tau \mathrm{sinc}_2(\tau f)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f T} = X_2(f)$$

mit $\mathrm{sinc}_2(x) \triangleq \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. Geben Sie die zugehörige Fouriertransformierte $X_1(\mathrm{j}\omega)$ an. Verwenden Sie im Endergebnis $\mathrm{sinc}_1(x) \triangleq \frac{\sin(x)}{x}$.

Beispiel 8 — Lineare Quantisierung
Im Folgenden betrachten wir ein Signal mit der Amplitudenverteilung

$$f_{\mathsf{S}}(s) = \frac{1}{2a}\mathrm{rect}\left(\frac{s}{2a}\right),$$

d.h. zu jedem beliebigen Zeitpunkt t ist $\mathsf{S}(t)$ eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion $f_{\mathsf{S}}(s)$. Weiters sei der Quantisierer $Q : \mathsf{S} \mapsto \hat{\mathsf{S}}$ definiert als

$$Q(x) \triangleq \begin{cases} -a & \text{für } x < -a, \\ q\frac{2i+1-m}{2} & \text{für } \left(i - \frac{m}{2}\right)q \le x \le \left(i+1-\frac{m}{2}\right)q \qquad i \in \{0, 1, ..., m-1\}, \\ a & \text{für } x > a \end{cases}$$

wobei die gerade Zahl m die Anzahl der Quantisierungsstufen bezeichnet und $q = 2a/m$.

(a) Skizzieren Sie $f_{\mathsf{S}}(s)$ und markieren Sie dabei die Quantisierungsintervalle und Quantisierungswerte von $Q(\cdot)$. Fertigen Sie außerdem eine Skizze von $Q(x)$ an.
Hinweis: Verwenden Sie für die Skizzen $m = 8$ und für die weiteren Punkte (b) bis (e) ein allgemeines m.

(b) Der Quantisierer bildet die kontinuierliche Zufallsvariable S auf die diskrete Zufallsvariable $\hat{\mathsf{S}}$ ab. Spezifizieren Sie die Menge $\mathcal{M}$ aller möglichen $\hat{\mathsf{S}}$ und finden Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_{\hat{\mathsf{S}}}(\hat{s}) = \mathrm{P}\{\hat{\mathsf{S}} = \hat{s}\}$.

(c) Nehmen Sie nun an, Sie kennen den Quantisiererausgang $\hat{\mathsf{S}} = \hat{s}$. Was sagt Ihnen dies über den Wert des Quantisierereingangs S? Finden Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathsf{S}|\hat{\mathsf{S}}}(s|\hat{s})$ für allgemeines $\hat{s} \in \mathcal{M}$.

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{\mathsf{E}}(e)$ des Quantisierungsfehlers $\mathsf{E} = \mathsf{S} - \hat{\mathsf{S}}$.
Hinweis: Es ist $f_{\mathsf{E}|\hat{\mathsf{S}}}(e|\hat{s}) = f_{\mathsf{S}|\hat{\mathsf{S}}}(e + \hat{s}|\hat{s})$ und es gilt das Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit

(Law of total probability)

$$f_{\mathsf{E}}(e) = \sum_{\hat{s}\in\mathcal{M}} f_{\mathsf{E}|\hat{\mathsf{S}}}(e|\hat{s}) p_{\hat{\mathsf{S}}}(\hat{s}).$$

(e) Berechnen Sie das Verhältnis zwischen Signalleistung und mittlerem quadratischen Quantisierungsfehler

$$\mathrm{SNR_q} = \frac{\mathbb{E}[\hat{\mathsf{S}}^2]}{\mathbb{E}[\mathsf{E}^2]}$$

als Funktion der Intervallanzahl m. Geben Sie außerdem $\mathrm{SNR_q^{(dB)}}$ als Funktion der Bitanzahl $b = \log_2 m$ für hohe Auflösung ($m \gg 1$) an.

Beispiel 9 — SNR einer PCM-Audioübertragung

Ein Audiosignal mit einer höchsten relevanten Frequenz von 16 kHz soll als linear quantisiertes PCM-Signal[1] übertragen werden. Der Sender verwendet ein ideales Anti-Aliasing-Filter. Für volle Aussteuerung wird ein Spitzen-$\mathrm{SNR_q} \geq 40\,\mathrm{dB}$ gefordert.

(a) Skizzieren Sie das Blockschaltbild des PCM-Systems.

(b) Wählen Sie eine geeignete Abtastfrequenz, wenn das Anti-Aliasing-Filter ab 20 kHz ausreichende Dämpfung bietet.

(c) Wie groß ist das mittlere geforderte $\mathrm{SNR_q}$, wenn das Audiosignal ein Verhältnis von Spitzenleistung zu mittlerer Leistung von 15 dB aufweist?

(d) Welche Codewortlänge ist notwendig?

(e) Welche Bitrate hat das PCM-Signal?

(f) Durch Kanalstörungen wird jedes millionste Bit falsch detektiert. Welches tatsächliche SNR ergibt sich durch den Einfluss von Bitfehlern auf der Empfängerseite für das rekonstruierte analoge Sprachsignal?

(g) Vergleichen Sie die Bandbreitenerhöhung mit dem Gewinn an $\mathrm{SNR_q}$. Welcher Zusammenhang besteht?

Beispiel 10 — Intersymbolinterferenz bei Matched Filter

Der Sender eines binären Kommunikationssystems verwendet $s_0(t)$ und $s_1(t) \triangleq -s_0(t)$ als Signalformen für das 0- bzw. 1-Bit. Es sei die Fouriertransformierte des Signals $s_0(t)$ gegeben als

$$s_0(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; S_0(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{tri}(\omega - 1) + \mathrm{tri}(\omega + 1).$$

(a) Skizzieren Sie $S_0(\mathrm{j}\omega)$.

(b) Berechnen und skizzieren Sie $s_0(t)$.

(c) Ist es möglich eine Symboldauer T_s zu wählen sodass $s_0(t)$ nach dem Nyquist ISI Kriterium ISI-frei ist? Wenn ja, geben sie T_s an.

(d) Am Empfänger wird ein Matched Filter zur Detektion verwendet. Bestimmen Sie die Impulsantwort des Filters. Handelt es sich dabei um ein kausales Filter?

[1] In Vorlesung, Buch und im vorherigen Beispiel wurden Formeln für ein Modell unter der Voraussetzung einer gleichverteilten Signalamplitude entwickelt. Diese können/sollen für das gegebene Beispiel verwendet werden, auch wenn diese Annahme für ein Sprachsignal streng genommen nicht gültig ist.

(e) Betrachten Sie das Spektrum des Signals nach dem Matched Filter. Tritt ISI auf?

(f) Falls in (e) keine ISI auftritt, so begründen Sie dies mit Hilfe des Nyquist ISI Kriteriums. Sollte ISI auftreten: Welche Maßnahmen würden sie ergreifen um ISI zu vermeiden (sender- und/oder empfängerseitig)?

Beispiel 11 — Manchester-Codierung auf einer Telegrafenleitung

Eine Telegrafenleitung mit einer Impedanz von $500\,\Omega$ und einer Dämpfung von $\alpha = 3.5\,\text{dB}/100\,\text{m}$ soll zur Übertragung von digitaler Information verwendet werden. Dazu wird ein binäres Basisbandsystem mit Manchester-Codierung verwendet, wobei die Sendesignale $s_0(t)$ und $s_1(t)$ in Abbildung 2 dargestellt sind. Die Sendeamplitude beträgt $A = 10\,\text{V}$ und die Symbolrate ist $R_\text{S} = 200\,\text{kbit/s}$. Es wird ein Korrelationsempfänger eingesetzt, an dessen Eingang die einseitige Gaußsche Rauschleistungsdichte $N_0 = -150\,\text{dBm/Hz}$ auftritt.

(a) Skizzieren Sie das Sendesignal bei der Eingangsdatenfolge (0101100).

(b) Welches Referenzsignal ergibt sich, wenn zur Detektion nur ein einziger Korrelator verwendet wird?

(c) Wie lang darf die Übertragungsstrecke maximal sein, wenn die Bitfehlerwahrscheinlichkeit einen Wert von $\text{P}\{\mathcal{E}\} = 10^{-9}$ nicht übersteigen soll?

(d) Der Sendeimpulsformer des 1–Bits s_1 fällt bei sonst gleich bleibenden Parametern aus. Welche Bitfehlerwahrscheinlichkeit ergibt sich unter der Annahme gleichwahrscheinlicher Sendesymbole? *Hinweis: Ein Ausfall des Sendeimpulsformers für s_1 bedeutet, dass statt s_1 ein Nullsignal gesendet wird. Der Empfänger bleibt davon unberührt.*

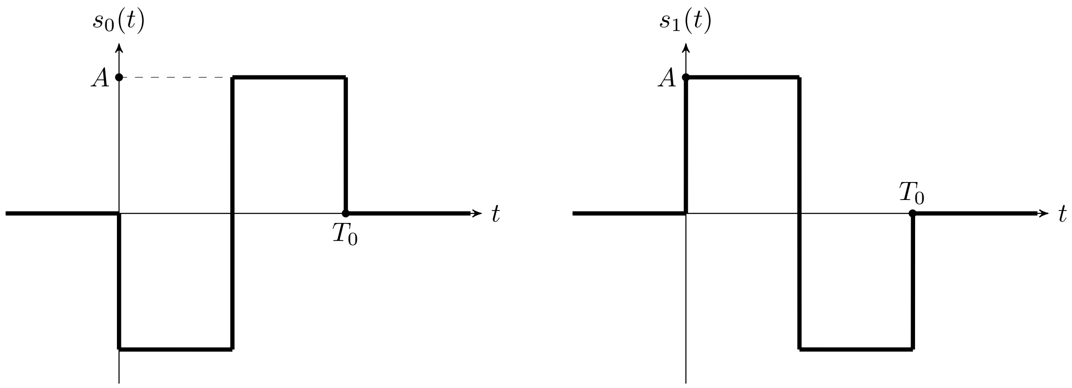

Abbildung 2: Manchester-codierte Sendesignale $s_0(t)$ und $s_1(t)$ aus Beispiel 11.

Beispiel 12 — Binäres Basisbandsystem

In einem binären Basisbandsystem wird für das 1-Bit die Kurvenform $s_1(t) = \text{rect}(t)$ und für das 0-Bit $s_0(t) = -\text{tri}(2t)$ verwendet. Die Dämpfung zwischen Sender und Empfänger beträgt $50\,\text{dB}$.

(a) Skizzieren Sie das Kommunikationssystem und die verwendeten Signale.

(b) Welches Referenzsignal ergibt sich, wenn zur Detektion nur ein Korrelator verwendet wird?

(c) Welchen Betrag darf die spektrale Rauschleistungsdichte unter der Annahme von weißem Gaußschen Rauschen am Korrelatoreingang nicht überschreiten, wenn die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit einen Wert von $\text{P}\{\mathcal{E}\} = 10^{-6}$ nicht übersteigen darf?