

389.138 Telekommunikation – 2014S

1. Übung – Lösungen

07.04.2014 – 11.04.2014

Einen Überblick über die in der Übung verwendete Notation finden Sie in TUWEL.

Sollten Sie Fehler finden, so wenden Sie sich bitte an tk138@nt.tuwien.ac.at.

Beispiel 1 — Zwei diskrete Zufallsvariablen

- (a) Beim zweimaligen Würfeln gibt es $|\{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}| = 36$ mögliche Versuchsausgänge, die alle die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$ besitzen. Die Wahrscheinlichkeit für $X = x$ und $Y = y$ ergibt sich aus der Multiplikation der Anzahl der möglichen Versuchsausgänge $|\mathcal{A}|$ die zu dem Ergebnis führen mit dieser Wahrscheinlichkeit.

$$p_{X,Y}(x, y) = P\{X = x \wedge Y = y\} = |\mathcal{A}| \cdot \frac{1}{36}, \quad \mathcal{A} \subset \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$$

Für die Anzahl der 1er/2er gilt $x, y \in \{0, 1, 2\} = \mathcal{X} = \mathcal{Y}$. Damit ergibt sich für $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$:

$$p_{X,Y}(0, 0) = |\{3, \dots, 6\} \times \{3, \dots, 6\}| \cdot \frac{1}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

$$p_{X,Y}(1, 0) = |\{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}| \cdot \frac{1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$p_{X,Y}(2, 0) = |\{(1, 1)\}| \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{36}$$

$$p_{X,Y}(1, 1) = |\{(1, 2), (2, 1)\}| \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$p_{X,Y}(0, 1) = p_{X,Y}(1, 0) = \frac{2}{9}$$

$$p_{X,Y}(0, 2) = p_{X,Y}(2, 0) = \frac{1}{36}$$

$$p_{X,Y}(2, 1) = p_{X,Y}(1, 2) = p_{X,Y}(2, 2) = |\emptyset| \cdot \frac{1}{36} = 0$$

Für die verwendete Symmetrie kann man sich vorstellen, dass man 1 und 2 auf dem Würfel austauscht, wodurch sich das Ergebnis nicht ändert. Es ergibt sich die gefragte Tabelle:

X/Y	0	1	2
0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten muss natürlich 1 ergeben:

$$\sum_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} p_{X,Y}(x, y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p_{X,Y}(x, y) = \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{18} = 1 \quad \checkmark$$

(b)

$$P\{X + Y > 0\} = P\{X \geq 1 \vee Y \geq 1\} = P\{X \neq 0 \wedge Y \neq 0\}$$

$$= 1 - \mathbb{P}\{X = 0 \wedge Y = 0\} = 1 - p_{X,Y}(0,0) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

(c) $C_{X,Y} = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \dots = \mathbb{E}[XY] - \mu_X\mu_Y = R_{X,Y} - \mu_X\mu_Y$. Um μ_X, μ_Y zu berechnen benötigen wir $p_X(x)$ und $p_Y(y)$.

$$\begin{aligned} p_X(0) &= |\{2, \dots, 6\} \times \{2, \dots, 6\}| \cdot \frac{1}{36} = \frac{25}{36} \\ p_X(1) &= |\{(1, k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}), (k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}, 1)\}| \cdot \frac{1}{36} = \frac{10}{36} \\ p_X(2) &= |\{(1, 1)\}| \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Eine andere Möglichkeit zur Berechnung von $p_X(x)$ und $p_Y(y)$ ist die sogenannte Marginalisierung:

$$p_X(x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} p_{X,Y}(x, y) \quad \text{z.B.} \quad p_X(1) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} p_{X,Y}(1, y) = \frac{2}{9} + \frac{1}{18} + 0 = \frac{10}{36}$$

Auch hier gilt $\sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) = \frac{25}{36} + \frac{10}{36} + \frac{1}{36} = 1 \quad \checkmark$.

Aus Symmetriegründen ist $p_Y(y) = p_X(y)$. Damit kann der Mittelwert berechnet werden:

$$\mu_Y = \mu_X = \sum_{x \in \mathcal{X}} x p_X(x) = 0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$$

Es verbleibt die (hier einfache) Berechnung der Korrelation $R_{X,Y}$

$$R_{X,Y} = \sum_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} xy p_{X,Y}(x, y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{18} \quad \Rightarrow \quad C_{X,Y} = R_{X,Y} - \mu_X\mu_Y = -\frac{1}{18}$$

(d) Um eine quantitative Aussage zu treffen, macht es Sinn, den Korrelationskoeffizienten $\rho_{X,Y}$ zu betrachten.

$$\rho_{X,Y} = \frac{C_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{-\frac{1}{18}}{\frac{5}{18}} = -\frac{1}{5} \in [-1, 1]$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass wenn X größer als der Mittelwert ist, Y statistisch eher kleiner sein wird als dieser. In diesem Beispiel kommt das daher, dass sobald X zumindest 1 ist, die Wahrscheinlichkeit für Y groß sinkt, weil jeder Würfel nur eine Zahl annehmen kann. Der Betrag von $\rho_{X,Y}$ beschreibt die Stärke des Effekts.

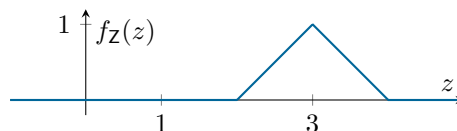


Abbildung 1: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_Z(z) = \text{tri}(z - 3)$ aus Beispiel 2.

Beispiel 2 — Schätzen einer Zufallsgröße

(a) Die Wahrscheinlichkeitsdichte von $f_Y(y)$ erhält man durch Differenzieren von $F_Y(y)$ nach y

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \text{rect}(y - 0.5)$$

Da X und Y unabhängige Zufallsvariablen sind, kann die die Wahrscheinlichkeitsdichte von $Z = X + Y$ über die Faltung der beiden Dichten berechnet werden. Im folgenden sei $\delta_{x_i}(x) \triangleq \delta(x - x_i)$. Da $f_X(x) = (\delta_{2.5} * \text{rect})(x)$ und $f_Y(y) = (\delta_{0.5} * \text{rect})(y)$ folgt

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = (\delta_{2.5} * \text{rect} * \delta_{0.5} * \text{rect})(z) = (\delta_3 * \underbrace{\text{rect} * \text{rect}}_{=\text{tri}})(z) = \text{tri}(z - 3).$$

Dabei wurde die Kommutativität und die Assoziativität der Faltung verwendet. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Z(z)$ ist in Abbildung 1 skizziert.

- (b) Es ist r so zu wählen, dass der quadratische Fehler $\varepsilon(r) = \mathbb{E}[(Z - r)^2]$ minimal wird. Unter Verwendung der Linearität von $\mathbb{E}[\cdot]$ erhalten wir

$$\varepsilon(r) = \mathbb{E}[(Z - r)^2] = \mathbb{E}[Z^2] - 2\mathbb{E}[Z]r + \mathbb{E}[r^2] = \mathbb{E}[Z^2] - 2\mathbb{E}[Z]r + r^2$$

Durch Ableiten und Nullsetzen $\varepsilon(r)$ von erhält man über

$$\frac{\partial \varepsilon(r)}{\partial r} = 2r - 2\mathbb{E}[Z] \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{z} = r_{\min} = \mathbb{E}[Z]$$

die Bedingung, dass der Schätzer \hat{z} dem Erwartungswert $\mathbb{E}[Z]$ entsprechen muss. Damit ergibt sich der Schätzwert zu

$$\hat{z} = \mathbb{E}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} z \text{tri}(z - 3) dz = \dots = 3.$$

- (c) Da es sich bei Z um eine kontinuierliche Zufallsvariable handelt ist $P\{Z = \hat{z}\} = P\{Z = 3\} = 0$.
- (d) Gesucht ist also Δ sodass $P\{3 - \Delta \leq z < 3 + \Delta\} \stackrel{!}{=} 0.5$. Da $f_Z(z)$ nur auf $(2, 4)$ ungleich 0 ist, müssen $3 - \Delta$ und $3 + \Delta$ in $(2, 4)$ liegen, also $\Delta < 1$ sein.

$$\begin{aligned} 0.5 &= P\{3 - \Delta \leq Z < 3 + \Delta\} = \int_{3-\Delta}^{3+\Delta} f_Z(z) dz \stackrel{\text{symm.}}{=} 2 \int_3^{3+\Delta} f_Z(z) dz \\ &= 2 \int_3^{3+\Delta} 4 - z dz = \dots = -\Delta^2 + 2\Delta \end{aligned}$$

Es ergibt sich also die quadratische Gleichung für Δ

$$\Delta^2 - 2\Delta + 0.5 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_{1,2} = 1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und da $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > 1$ ist, ist Δ als $\Delta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ zu wählen.

- (e) Wie in (d) bereits erwähnt, ist $f_Z(z)$ nur auf $(2, 4)$ ungleich 0 und man muss deswegen, nach analoger Argumentation, $\Delta = 1$ wählen.

Beispiel 3 — Fehlerwahrscheinlichkeit

- (a) Zuerst werden die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten $f_{Y|X}(y|x)$ berechnet. Für ein gegebenes $x \in \{-1, 1\}$ ist gemäß

$$Y = X + N \tag{1}$$

$Y = -1 + N$ oder $Y = 1 + N$. Die gesuchten bedingten Dichten ergeben sich durch Verschiebung um diese deterministischen (nicht mehr zufälligen) Werte. Man erhält also

$$f_{Y|X}(y| -1) = f_N(y+1) \quad \text{und} \quad f_{Y|X}(y|1) = f_N(y-1). \quad (2)$$

Die gewichteten Dichten $f_{Y|X}(y|x)P\{X=x\}$ erhält man durch Multiplikation mit der Auftretenswahrscheinlichkeit $P\{X=x\}$

$$f_{Y|X}(y| -1)P\{X = -1\} = \frac{1}{3}f_N(y+1) \quad \text{und} \quad f_{Y|X}(y|1)P\{X = 1\} = \frac{2}{3}f_N(y-1).$$

Für die kombinierte Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Y(y)$ ergibt sich nach dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit (*Law of total probability*)

$$f_Y(y) = f_{Y|X}(y| -1)P\{X = -1\} + f_{Y|X}(y|1)P\{X = 1\} = \frac{1}{3}f_N(y+1) + \frac{2}{3}f_N(y-1).$$

Erklärung mithilfe der Faltung unabhängiger Zufallsvariablen: Allgemein ergibt sich für unabhängige X und N mit dem Modell $Y = X + N$ unter der Annahme einer diskreten Eingangsverteilung $f_X(x) = \sum_{x_i \in \mathcal{X}} P\{X = x_i\} \delta(x - x_i)$ durch Faltung der Dichten $f_X(x)$ und $f_N(n)$

$$f_Y(y) = (f_X * f_N)(y) = \sum_{x_i \in \mathcal{X}} \underbrace{f_N(y - x_i)}_{=f_{Y|X}(y|x_i)} P\{X = x_i\}$$

Die gesuchten Skizzen sind in Abbildungen 2a und 2b zu sehen.

(b) Der Entscheider entscheidet sich nach

$$\hat{x}(y) = \arg \max_{x \in \{-1, 1\}} \{f_{Y|X}(y|x)P\{X=x\}\}.$$

Das bedeutet er wählt bei einem gegebenen y , das $x \in \{-1, 1\}$ aus, für das $f_{Y|X}(y|x)P\{X=x\}$ größer ist. Die Projektion der Schnittpunkte auf die Abszisse ergeben die Grenzen der Entscheidungsgebiete. Letztere sind ebenfalls in Abbildung 2b eingezeichnet. Die zwei Schnittpunkte erhält man rechnerisch indem man die beiden gewichteten Dichten gleichsetzt.

$$f_{Y|X}(y| -1)P\{X = -1\} \stackrel{!}{=} f_{Y|X}(y|1)P\{X = 1\} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}f_N(y+1) \stackrel{!}{=} \frac{2}{3}f_N(y-1)$$

Dies liefert nach kurzer Umformung eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $y_1 = -3 - \sqrt{7}$ und $y_2 = -3 + \sqrt{7}$. Es ergeben sich, unter Zuhilfenahme der Skizze, die Entscheidungsregionen $\mathcal{R}_{1,a} = (-\infty, y_1)$, $\mathcal{R}_{1,b} = (y_2, \infty)$ und $\mathcal{R}_{-1} = [y_1, y_2]$. Damit entscheidet der Empfänger nach

$$\hat{x}(y) = \begin{cases} 1, & \text{für } y \in \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_{1,a} \cup \mathcal{R}_{1,b} \\ -1, & \text{für } y \in \mathcal{R}_{-1} \end{cases}$$

welches \hat{x} wahrscheinlich gesendet wurde.

Interpretation: Ist y also in unmittelbarer Nähe von 1 oder -1 entscheidet man sich für das naheliegende Symbol. Für sehr negative Werte sind beide bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten sehr niedrig, das Rauschen ist also im Vergleich zum Signal stark. Daher entscheidet man sich hier für das a priori wahrscheinlichere Symbol 1.

(c) Unter Verwendung der Verteilungsfunktionen

$$F_{\mathbf{N}}(n) = \mathbb{P}\{\mathbf{N} \leq n\} = \int_{-\infty}^n f_{\mathbf{N}}(n') dn' = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan n,$$

$$F_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(y|x) = \mathbb{P}\{\mathbf{Y} \leq y | \mathbf{X} = x\} = \int_{-\infty}^y f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(y'|x) dy' = F_{\mathbf{N}}(y - x)$$

ergibt sich mit $\mathbb{P}\{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}\} = \mathbb{P}\{\mathcal{A}|\mathcal{B}\}\mathbb{P}\{\mathcal{B}\}$

$$\begin{aligned} P_e &= \mathbb{P}\{\hat{\mathbf{X}} \neq \mathbf{X}\} = \mathbb{P}\{\hat{\mathbf{X}} = 1 \wedge \mathbf{X} = -1\} + \mathbb{P}\{\hat{\mathbf{X}} = -1 \wedge \mathbf{X} = 1\} \\ &= \mathbb{P}\{\hat{\mathbf{X}} = 1 | \mathbf{X} = -1\} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = -1\} + \mathbb{P}\{\hat{\mathbf{X}} = -1 | \mathbf{X} = 1\} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = 1\} \\ &= \mathbb{P}\{\mathbf{Y} \in \mathcal{R}_1 | \mathbf{X} = -1\} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = -1\} + \mathbb{P}\{\mathbf{Y} \in \mathcal{R}_{-1} | \mathbf{X} = 1\} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = 1\} \\ &= \mathbb{P}\{\mathbf{Y} < y_1 \vee \mathbf{Y} > y_2 | \mathbf{X} = -1\} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = -1\} + \mathbb{P}\{y_1 \leq \mathbf{Y} \leq y_2 | \mathbf{X} = 1\} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = 1\} \\ &= \left(\underbrace{\mathbb{P}\{\mathbf{Y} < y_1 | \mathbf{X} = -1\}}_{=F_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(y_1|-1)} + \underbrace{\mathbb{P}\{\mathbf{Y} > y_2 | \mathbf{X} = -1\}}_{=1-F_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(y_2|-1)} \right) \mathbb{P}\{\mathbf{X} = -1\} + \underbrace{\mathbb{P}\{y_1 \leq \mathbf{Y} \leq y_2 | \mathbf{X} = 1\}}_{F_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(y_2|1)-F_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(y_1|1)} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = 1\} \\ &= \frac{1}{3} \left(F_{\mathbf{N}}(y_1 + 1) + 1 - F_{\mathbf{N}}(y_2 + 1) \right) + \frac{2}{3} \left(F_{\mathbf{N}}(y_2 - 1) - F_{\mathbf{N}}(y_1 - 1) \right) = 0.2316043011 \dots \end{aligned}$$

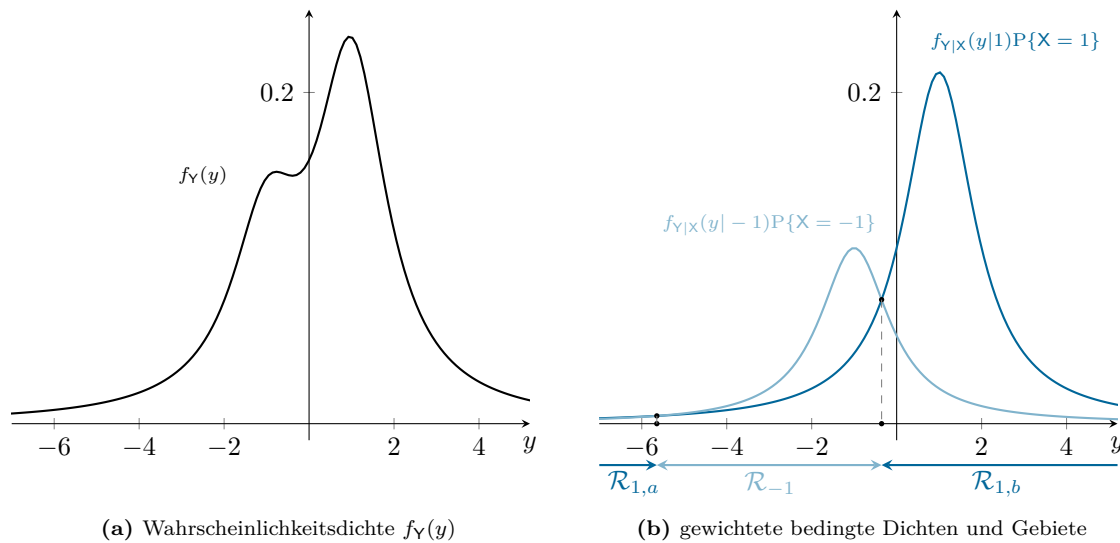


Abbildung 2: Beispiel 3

Beispiel 4 — Fehlerwahrscheinlichkeit AWGN Kanal

(a) Da die Vorgangsweise ähnlich wie bei Beispiel 3 ist, sollen hauptsächlich die Unterschiede aufgezeigt werden.

(i) Für die Dichten erhält man daher

$$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(y|-v) = f_{\mathbf{N}}(y+v) \quad \text{und} \quad f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(y|v) = f_{\mathbf{N}}(y-v)$$

und für f_Y ergibt sich

$$f_Y(y) = f_{Y|X}(y|-v)P\{X = -v\} + f_{Y|X}(y|v)P\{X = v\} = \frac{1}{2}[f_N(y+v) + f_N(y-v)]$$

Die Dichten sind in Abbildungen 3a und 3b skizziert.

- (ii) Da die beiden Symbole gleichwahrscheinlich sind, gibt es beim Schneiden der gewichteten bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten nur einen Schnittpunkt. Dieser ist unabhängig vom Parameter v immer bei $y = 0$, was sich analog wie in Beispiel 3 nachrechnen lässt. Es gibt in diesem Fall nur zwei Entscheidungsgebiete, da für $y > 0$ immer $Z = 1$ wahrscheinlicher ist. Die Entscheidung wird vom Empfänger nach

$$\hat{x}(y) = \begin{cases} 1, & \text{für } y > 0 \\ -1, & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

getroffen.

Interpretation: Aus Symmetriegründen liegt die Entscheidungsgrenze genau in der Mitte.

- (iii) Wegen der Symmetrie ist $P\{\hat{X} = v|X = -v\} = P\{\hat{X} = -v|X = v\}$.

$$\begin{aligned} P\{\hat{X} = v|X = -v\} &= \int_0^\infty f_{Y|X}(y|-v) dy = \int_0^\infty f_N(y+v) dy = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y+v)^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \frac{y+v}{\sigma} \\ dt = \frac{dy}{\sigma} \end{array} \right| = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{v}{\sigma}}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{\mathcal{Q}\left(\frac{v}{\sigma}\right)} = \mathcal{Q}\left(\frac{v}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Es ergibt sich also für P_e

$$P_e = P\{\hat{X} = v|X = -v\}P\{X = -v\} + P\{\hat{X} = -v|X = v\}P\{X = v\} = \mathcal{Q}\left(\frac{v}{\sigma}\right).$$

Unter Verwendung der Beziehung $\mathcal{Q}(x) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}))$ sowie mit der Notation $\Delta V = 2v$ ergibt sich Gleichung (6.8) aus [1]:

$$P_e = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\Delta V}{2\sqrt{2}\sigma} \right) \right)$$

- (b) (i) $5x = \mathcal{Q}(4) \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}\mathcal{Q}(4) = 0.000006334245948\dots$
(ii) $x = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{erf}(3)) = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(3) = \frac{1}{2} \cdot 2\mathcal{Q}(\sqrt{2} \cdot 3) = 0.00001104551\dots$
(iii) $10^{-5} = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(5x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \mathcal{Q}(\sqrt{2} \cdot 5 \cdot x) \Leftrightarrow 4.26489\dots = \sqrt{2} \cdot 5 \cdot x \Leftrightarrow x = 0.603146\dots$

Beispiel 5 — MIMO Kanal

- (a) Das Signal $r_2(t)$ ergibt sich durch Einsetzen in die Definition und Anwenden elementarer Eigenschaften des Faltungsprodukts.

$$r_2(t) = \sum_{j=1}^2 (h_{i,j} * s_j)(t) = (h_{2,1} * s_1)(t) + (h_{2,2} * s_2)(t)$$

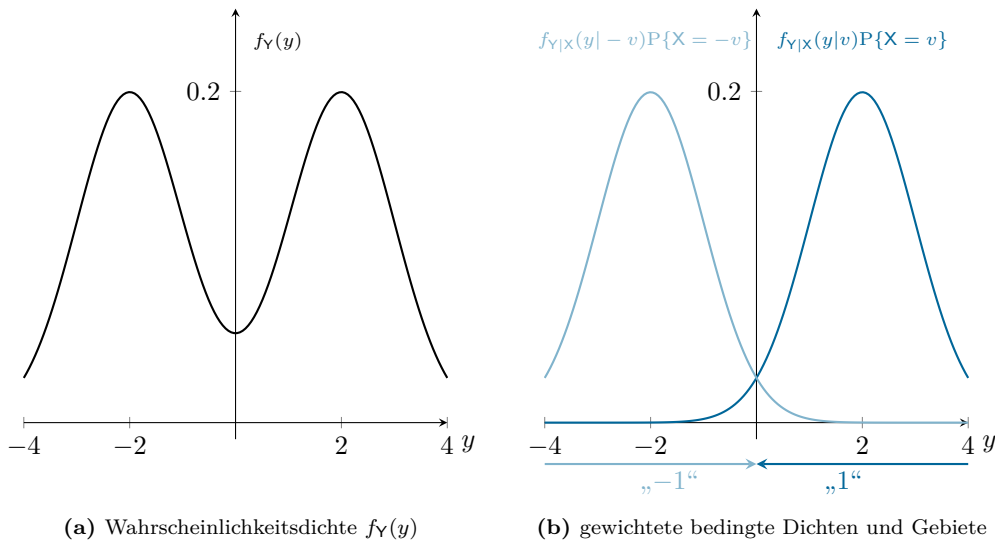


Abbildung 3: Beispiel 4: Skizzen für $v = 2, \sigma = 1$

$$= 1.5\text{rect}(t - 1) + \text{rect}(t - 2)$$

Das Signal ist in Abbildung 4 dargestellt. Im Allgemeinen können räumliche und zeitliche Interferenzen auftreten. In diesem speziellen Fall interferieren der hintere Teil von $(h_{1,2} * s_1)(t)$ mit dem vorderen Teil von $(h_{2,2} * s_2)(t)$.

- (b) Durch Vereinfachung der Impulsantworten $h_{i,j} = H_{i,j}\delta(t)$ führt das Faltungsprodukt auf eine einfache Multiplikation, da der Dirac-Stoß das Einselement der Faltungsalgebra darstellt ($\delta * x = x$). Somit ist eine Matrixdarstellung möglich, die hier für $N_{\text{TX}} = 2$ angeführt ist.

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= h_{1,1} * s_1 + h_{1,2} * s_2 \\ r_2 &= h_{2,1} * s_1 + h_{2,2} * s_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r_1 &= H_{1,1}s_1 + H_{1,2}s_2 \\ r_2 &= H_{2,1}s_1 + H_{2,2}s_2 \end{aligned} \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{H}\mathbf{s}(t)$$

- (c) Durch Einsetzen des linearen Zusammenhangs $\mathbf{s}'(t) = \mathbf{P}\mathbf{s}(t)$ folgt

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{H}\mathbf{s}'(t) = \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{s}(t) \stackrel{!}{=} \mathbf{s}(t)$$

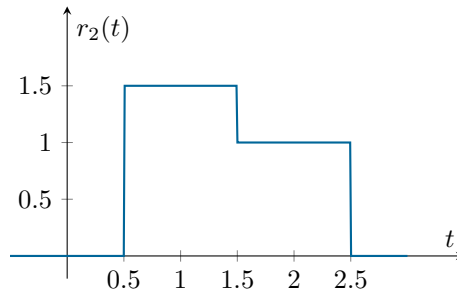
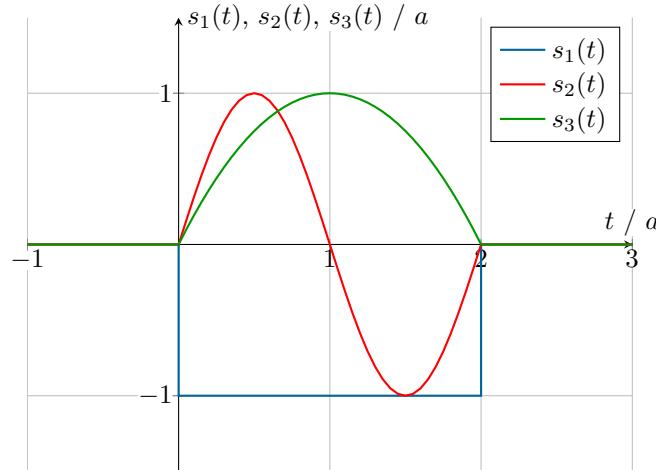
Eine mögliche Lösung für eine interferenzfreie Übertragung wäre $\mathbf{P} = \mathbf{H}^{-1}$, das eine Invertierung des Kanals bedeuten würde (Räumliches Entzerren). In diesem Fall muss die Kanalmatrix \mathbf{H} invertierbar sein.

Beispiel 6 — Kreuzkorrelation, Signalenergie und Fehlerwahrscheinlichkeit

- (a) Die Signale $s_1(t)$, $s_2(t)$ und $s_3(t)$ sind in Abbildung 5 skizziert.
 (b) Die Signalenergien der drei Signale $s_1(t)$, $s_2(t)$ und $s_3(t)$ berechnen sich nach der Definition

$$E_i = \int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt, \quad i = 1 \dots 3,$$

wobei die rect-Funktion alle drei Signale auf den Bereich $t \in [0, 2a]$ beschränkt und die Integration

Abbildung 4: Empfangenes interferiertes Signal $r_2(t)$ Abbildung 5: Skizze der Signale $s_1(t)$, $s_2(t)$ und $s_3(t)$.

nur über diesen Bereich durchgeführt werden muss.

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |s_1(t)|^2 dt = \int_0^{2a} (-a)^2 dt = a^2(2a - 0) = 2a^3$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |s_2(t)|^2 dt = \int_0^{2a} a^2 \sin^2\left(\pi \frac{t}{a}\right) dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{2a} 1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{a}\right) dt = \frac{a^2}{2} \left[t - \frac{\sin\left(2\pi \frac{t}{a}\right)}{2\pi \frac{1}{a}} \right]_0^{2a} = \\ &= \frac{a^2}{2} (2a - 0 - 0 + 0) = a^3 \end{aligned}$$

$$E_3 = \int_{-\infty}^{\infty} |s_3(t)|^2 dt = \int_0^{2a} a^2 \left(1 - \left(\frac{t}{a} - 1\right)^2\right)^2 dt = \left| \begin{array}{l} u = \frac{t}{a} - 1 \\ dt = a du \end{array} \right| = a^3 \int_{-1}^1 (1 - u^2)^2 du = \frac{16}{15} a^3$$

- (c) Die normierte Kreuzkorrelationsfunktion $\rho_{12}(\tau)$ ergibt sich durch die Normierung der Kreuzkorrelationsfunktion $R_{12}(\tau)$ auf die beiden Signalenergien E_1 und E_2 gemäß

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} R_{12}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t - \tau) dt$$

Da sich die beiden Signale $s_1(t)$ und $s_2(t)$ nur über den Zeitbereich $t = 0 \dots 2a$ überstrecken, müssen die vier verschiedenen Fälle der Überlappung beim Integral berücksichtigt werden.

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2a^3 a^3}} \int_{-\infty}^{\infty} (-a) \operatorname{rect}\left(\frac{t-a}{2a}\right) a \sin\left(\pi \frac{t-\tau}{a}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t-\tau-a}{2a}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{a\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\pi \frac{t-\tau}{a}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t-a}{2a}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t-\tau-a}{2a}\right) dt$$

Mit der allgemeinen Lösung des Integrals

$$-\frac{1}{a\sqrt{2}} \int_{t_0}^{t_1} \sin\left(\pi \frac{t-\tau}{a}\right) dt = -\frac{1}{a\sqrt{2}} \left[\frac{-\cos\left(\pi \frac{t-\tau}{a}\right)}{\frac{\pi}{a}} \right]_{t_0}^{t_1} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cos\left(\pi \frac{t-\tau}{a}\right) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

ergibt sich die normierte Kreuzkorrelationsfunktion zu

$$\rho_{12}(\tau) = \begin{cases} \tau \leq 2a : & 0 \\ -2a < \tau \leq 0 : & \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cos\left(\pi \frac{t-\tau}{a}\right) \Big|_0^{\tau+2a} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left[\underbrace{\cos\left(\pi \frac{\tau+2a-\tau}{a}\right)}_{=1} - \cos\left(\pi \frac{-\tau}{a}\right) \right] = \\ & = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} [1 - \cos\left(\pi \frac{\tau}{a}\right)] \\ 0 < \tau < 2a : & \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cos\left(\pi \frac{t-\tau}{a}\right) \Big|_{\tau}^{2a} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left[\cos\left(\pi \frac{2a-\tau}{a}\right) - \underbrace{\cos\left(\pi \frac{\tau-\tau}{a}\right)}_{=1} \right] = \\ & = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} [\cos(2\pi - \pi \frac{\tau}{a}) - 1] = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} [\cos\left(\pi \frac{\tau}{a}\right) - 1] \\ 2a \leq \tau : & 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \tau \leq 2a : & 0 \\ -2a < \tau \leq 0 : & \frac{1}{\pi\sqrt{2}} [1 - \cos\left(\pi \frac{\tau}{a}\right)] \\ 0 < \tau < 2a : & \frac{1}{\pi\sqrt{2}} [\cos\left(\pi \frac{\tau}{a}\right) - 1] \\ 2a \leq \tau : & 0 \end{cases} = \frac{\operatorname{sgn}(\tau)}{\pi\sqrt{2}} [\cos\left(\pi \frac{\tau}{a}\right) - 1] \operatorname{rect}\left(\frac{\tau}{4a}\right)$$

Damit ergibt sich für $\rho_{12}(0) = 0$. Eine Skizze des Ergebnisses ist in Abbildung 6 dargestellt. Analog dazu kann der normierte Korrelationskoeffizient $\rho_{13}(0)$ berechnet werden, wobei zur Ver-

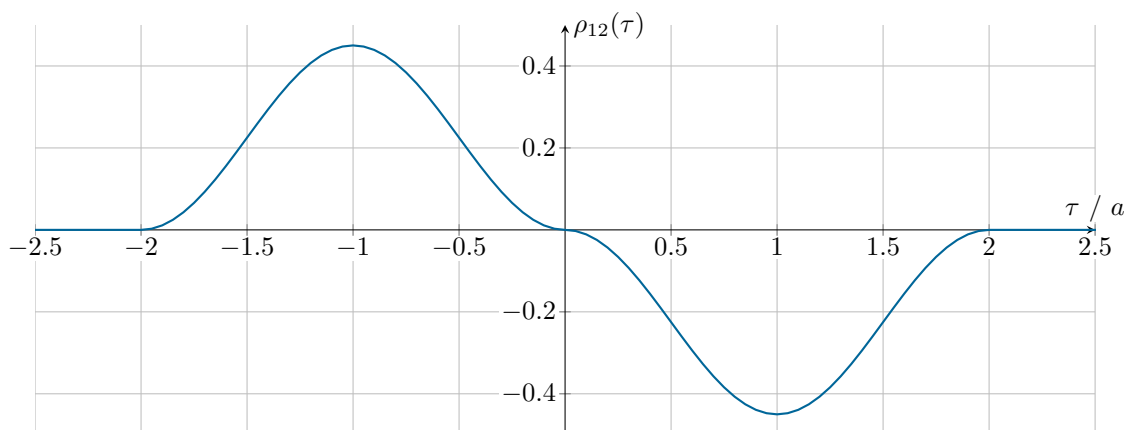


Abbildung 6: Skizze der normierten Kreuzkorrelationsfunktion $\rho_{12}(\tau)$.

einfachung der Rechnung gleich zu Beginn $\tau = 0$ eingesetzt werden kann. Es gilt daher

$$\begin{aligned} \rho_{13}(\tau)|_{\tau=0} = \rho_{13}(0) &= \frac{1}{\sqrt{E_1 E_3}} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_3(t-0) dt = \frac{1}{\sqrt{2a^3 \frac{16}{15} a^3}} \int_0^{2a} (-a)a \left(1 - \left(\frac{t}{a} - 1\right)^2\right) dt \\ &= \left| \frac{u = \frac{t}{a} - 1}{dt = a du} \right| = -\frac{a^3}{a^3 \sqrt{\frac{32}{15}}} \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = -\sqrt{\frac{15}{32}} \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 \approx -0.91287. \end{aligned}$$

(d) Für den allgemeinsten Fall eines binären Übertragungssystems gilt

$$P\{\mathcal{E}\} = Q\left(\frac{\Delta V}{2\sigma}\right).$$

Für den Matched Filter ist ΔV die Energiedifferenz der Entscheidung gemäß [1] Gleichung (8.56)

$$\Delta V = E_0 + E_1 - 2\rho\sqrt{E_0 E_1}$$

und die RMS-Rauschleistungsdichte σ für den Matched Filter ist in [1] Gleichung (8.49) mit

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2} \Delta V}$$

gegeben. Für die Übertragung werden die beiden Signale $s_1(t)$ und $s_2(t)$ verwendet, daher gilt $\rho = \rho_{12}(0) = 0$. Es handelt sich dabei also um orthogonale Signale. Damit stehen alle Zusammenhänge fest und die gesuchte Größe a lässt sich daraus ableiten.

$$\begin{aligned} P\{\mathcal{E}\} = Q\left(\frac{\Delta V}{2\sigma}\right) &= Q\left(\frac{\Delta V}{2\sqrt{\frac{N_0}{2} \Delta V}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\Delta V}{2N_0}}\right) \stackrel{!}{=} 10^{-9} \\ &\iff \sqrt{\frac{\Delta V}{2N_0}} \stackrel{!}{=} 6 \\ \Delta V = E_1 + E_2 &= \left(6\sqrt{2N_0}\right)^2 \\ 2a^3 + a^3 &= 72N_0 \\ a &= \sqrt[3]{24N_0} \approx 0.0134 \end{aligned}$$

Beispiel 7 — Fouriertransformation

(a) Mit der allgemeinen Beziehung $\omega = 2\pi f$ erhält man

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = X_2(f).$$

Somit gilt der Zusammenhang $X_1(j2\pi f) = X_2(f)$ bzw. $X_1(j\omega) = X_2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$.

(b) Die Gültigkeit ist durch einfaches Einsetzen in die Definitionen und anschließendes Vertauschen des äußeren und inneren Integrals sowie Anwenden der Abtasteigenschaft des Dirac-Stoßes $x(t)\delta(t-T) = x(T)\delta(t-T)$ beweisbar.

$$\mathcal{F}_1^{-1}\{\mathcal{F}_1\{x(t)\}\} = \mathcal{F}_1^{-1}\{X_1(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j\omega t'} dt' e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j\omega t'} e^{j\omega t} dt' d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t'} e^{j\omega t} d\omega dt' = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(t'-t)} d\omega}_{=\delta(t'-t) \text{ (siehe Hinweis)}} dt' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \delta(t' - t) dt' = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t' - t) dt' = x(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t' - t) dt'}_{=1} = x(t)
\end{aligned}$$

Der Beweis für Fouriertransformation aus Buch 2 ist nach der Substitution $f = \omega/2\pi$ auf analoge Weise durchführbar. Das Fazit aus (a) und (b) ist, dass die Fouriertransformationen aus Buch 1 und Buch 2 äquivalent sind.

(c) Unter Verwendung von (a) folgt

$$X_1(j\omega) = X_2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \tau \operatorname{sinc}_2\left(\tau \frac{\omega}{2\pi}\right) e^{-j\pi \frac{\omega}{2\pi} T} = \tau \frac{\sin\left(\pi \tau \frac{\omega}{2\pi}\right)}{\pi \tau \frac{\omega}{2\pi}} e^{-j\omega T} = \tau \operatorname{sinc}_1\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\omega T}.$$

Beispiel 8 — Lineare Quantisierung

(a) Die Amplitudenverteilung $f_S(s)$ und der Quantisierer $Q(x)$ sind in Abbildung 7 für $m = 8$ dargestellt. Der dargestellte Quantisierer kann die Werte $\{-\frac{7}{2}q, -\frac{5}{2}q, -\frac{3}{2}q, -\frac{1}{2}q, \frac{1}{2}q, \frac{3}{2}q, \frac{5}{2}q, \frac{7}{2}q\}$ annehmen.

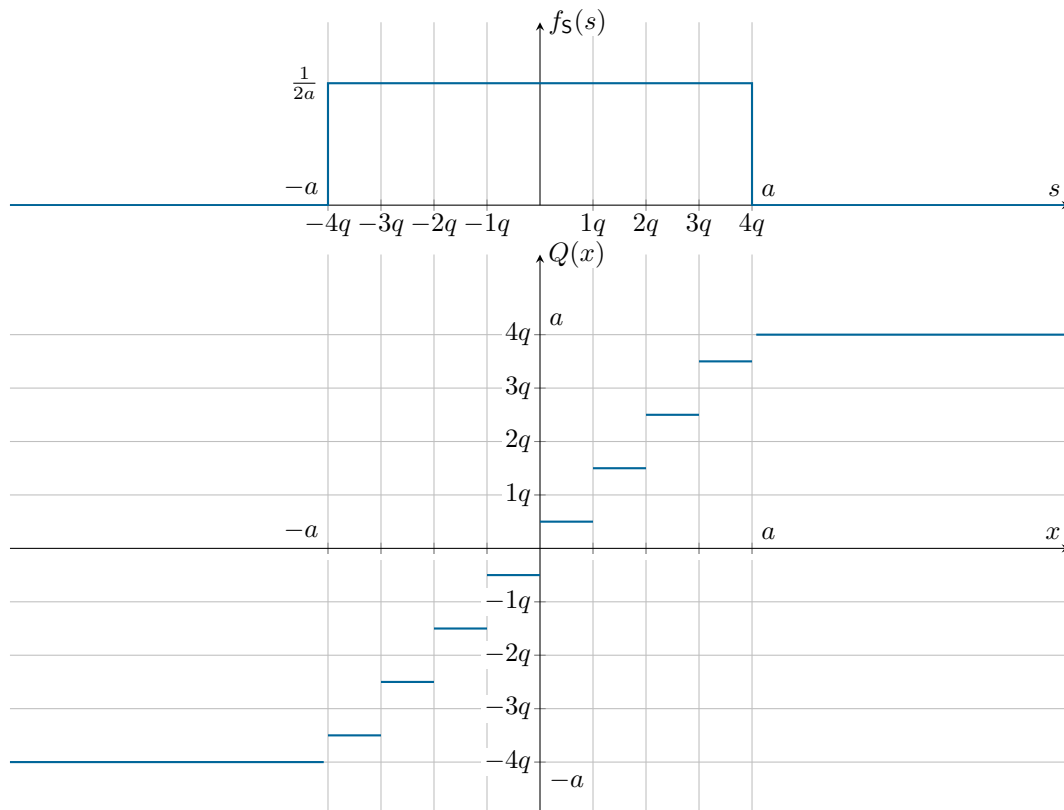


Abbildung 7: Skizze der Amplitudenverteilung $f_S(s)$ und des Quantisierers $Q(x)$ mit $q = \frac{2a}{m}$ für $m = 8$.

- (b) Der Quantisierer $Q(x)$ kann für die gegebene Amplitudenverteilung mit einem allgemeinen m nur die diskreten Werte

$$\mathcal{M} = \left\{ q \frac{2i+1-m}{2} \right\} \text{ mit } i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

annehmen. Die Wahrscheinlichkeit als Ergebnis des Quantisierers ein bestimmtes $\hat{S} \in \mathcal{M}$ zu erhalten ergibt sich nun als die gesamte Wahrscheinlichkeit ein S zu erhalten, welches im zugehörigen Intervall liegt. Daraus folgt der Zusammenhang

$$p_{\hat{S}}(\hat{s}) = P\{\hat{S} = \hat{s}\} = P\left\{\hat{s} - \frac{q}{2} \leq S \leq \hat{s} + \frac{q}{2}\right\} = \frac{q}{2a} = \frac{1}{2a} \frac{2a}{m} = \frac{1}{m},$$

welcher zeigt, dass Wahrscheinlichkeitsfunktion des Quantisiererausgangs unabhängig von \hat{s} ist und damit einer gleichverteilten Zufallsvariable entspricht.

- (c) Ist nun der Quantisiererausgang $\hat{S} = \hat{s}$ bekannt, kann nun umgekehrt auch eine Aussage über die Zufallsvariable am Quantisierereingang S getroffen werden. Für ein bekanntes $\hat{S} = \hat{s}$ muss der Wert S am Eingang des Quantisierers im Intervall $[\hat{s} - \frac{q}{2}, \hat{s} + \frac{q}{2}]$ liegen. Dementsprechend ist die bedingte Dichte außerhalb dieses Intervalls 0 und innerhalb des Intervalls proportional zu $f_S(s)$:

$$f_{S|\hat{S}}(s|\hat{s}) = \begin{cases} A f_S(s) & \text{für } \hat{s} - \frac{q}{2} \leq s \leq \hat{s} + \frac{q}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= A f_S(s) \text{rect}\left(\frac{s - \hat{s}}{q}\right) = A \frac{1}{2a} \text{rect}\left(\frac{s}{2a}\right) \text{rect}\left(\frac{s - \hat{s}}{q}\right) = \frac{A}{2a} \text{rect}\left(\frac{s - \hat{s}}{q}\right)$$

mit der Normierungsvariablen A . Der Ausdruck $\text{rect}(s/2a)$ fällt weg, da sich dieses Rechteck über alle möglichen s erstreckt, während das zweite Rechteck $\text{rect}((s - \hat{s})/q)$ einen Teil davon herauschneidet. Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte muss nun noch auf 1 normiert werden gemäß

$$1 \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_{S|\hat{S}}(s|\hat{s}) ds = \int_{\hat{s} - \frac{q}{2}}^{\hat{s} + \frac{q}{2}} \frac{A}{2a} ds = \frac{A}{2a} \left(\hat{s} + \frac{q}{2} - \hat{s} + \frac{q}{2} \right) = \frac{A}{2a} q = \frac{A}{2a} \frac{2a}{m} = \frac{A}{m}$$

$$\Rightarrow A = m.$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte lautet daher mit $q = 2a/m$

$$f_{S|\hat{S}}(s|\hat{s}) = \frac{1}{q} \text{rect}\left(\frac{s - \hat{s}}{q}\right). \quad (3)$$

- (d) Unter der Bedingung, dass ein bestimmtes $\hat{S} = \hat{s} \in \mathcal{M}$ auftritt, ergibt sich für den Quantisierungsfehler $E = S - \hat{S}$ der Zusammenhang

$$\underbrace{(E|\hat{S} = \hat{s})}_{\sim f_{E|\hat{S}}(e|\hat{s})} = \underbrace{(S|\hat{S} = \hat{s})}_{\sim f_{S|\hat{S}}(s|\hat{s})} - \underbrace{(\hat{S}|\hat{S} = \hat{s})}_{=\hat{s}}. \quad (4)$$

wodurch der Zusammenhang des Hinweises

$$f_{E|\hat{S}}(e|\hat{s}) = f_{S|\hat{S}}(e + \hat{s}|\hat{s})$$

folgt.¹ Mit Gleichung (3) lässt sich nun die totale Wahrscheinlichkeitsdichte des Quantisierungsfehlers nach

$$\begin{aligned} f_E(e) &= \sum_{\hat{s} \in \mathcal{M}} f_{E|\hat{S}}(e|\hat{s})p_{\hat{S}}(\hat{s}) = \sum_{\hat{s} \in \mathcal{M}} f_{S|\hat{S}}(e + \hat{s}|\hat{s})p_{\hat{S}}(\hat{s}) = \sum_{\hat{s} \in \mathcal{M}} \frac{1}{q} \operatorname{rect}\left(\frac{e + \hat{s} - \hat{s}}{q}\right) \frac{1}{m} = \\ &= \underbrace{\sum_{\hat{s} \in \mathcal{M}} \frac{1}{q} \operatorname{rect}\left(\frac{e}{q}\right) \frac{1}{m}}_{|\mathcal{M}|=m \text{ identische Ausdrücke}} = m \frac{1}{q} \operatorname{rect}\left(\frac{e}{q}\right) \frac{1}{m} = \frac{1}{q} \operatorname{rect}\left(\frac{e}{q}\right) \end{aligned}$$

berechnen. Es handelt sich beim Quantisierungsfehler also um eine gleichverteilte Zufallsvariable im Bereich $-\frac{q}{2} \dots \frac{q}{2}$.

- (e) Die beiden Erwartungswerte $\mathbb{E}[\hat{S}^2]$ und $\mathbb{E}[E^2]$ lassen sich mit nun bekannten Funktionen $p_{\hat{S}}(\hat{s})$ und $f_E(e)$ berechnen.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{S}^2] &= \sum_{\hat{s} \in \mathcal{M}} \hat{s}^2 p_{\hat{S}}(\hat{s}) = \frac{1}{m} \sum_{\hat{s} \in \mathcal{M}} \hat{s}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \left(q \frac{2i+1-m}{2} \right)^2 = \frac{q^2}{4m} \sum_{i=0}^{m-1} (2i+1-m)^2 \\ &= \frac{q^2}{4m} \sum_{i=0}^{m-1} 4i^2 + 4(1-m)i + (1-m)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Die beiden Reihen $\sum 4i^2$ und $\sum 4(1-m)i$ in Gleichung (5) liefern für $i=0$ keinen Beitrag. Es können daher die Summen der endlichen Reihen nach

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

eingesetzt werden und es folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{S}^2] &= \frac{q^2}{4m} \left[\frac{4}{6}(m-1)m(2m-1) + 2(1-m)(m-1)m + m(1-m)^2 \right] \\ &= \frac{q^2}{4} \left[\frac{2}{3}(m-1)(2m-1) - 2(1-m)^2 + (1-m)^2 \right] \\ &= \frac{q^2}{4} \left[\frac{2}{3}(m-1)(2m-1) - (1-m)^2 \right] = \frac{q^2}{4} \left[\frac{2}{3}(2m^2 - 3m + 1) - (1 - 2m + m^2) \right] \\ &= \frac{q^2}{4} \left[\frac{4}{3}m^2 - 2m + \frac{2}{3} - 1 + 2m - m^2 \right] = \frac{q^2}{4} \left[\frac{1}{3}m^2 - \frac{1}{3} \right] = \frac{q^2}{12}(m^2 - 1). \end{aligned}$$

Der Quantisierungsfehler ist eine kontinuierliche Zufallsvariable, dessen Varianz sich nach

$$\mathbb{E}[E^2] = \int_{-\infty}^{\infty} e^2 f_E(e) de = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^2 \frac{1}{q} de = \frac{1}{q} \frac{e^3}{3} \Big|_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} = \frac{1}{3q} \left(\frac{q^3}{8} + \frac{q^3}{8} \right) = \frac{q^2}{12}$$

ergibt. Das gesuchte SNR_q ist daher

$$\text{SNR}_q = \frac{\mathbb{E}[\hat{S}^2]}{\mathbb{E}[E^2]} = m^2 - 1$$

¹ Beachten Sie den Zusammenhang zwischen Gleichung (1) aus Beispiel 3 und Gleichung (4): Für gegebenes $\mathbf{X} = x$ ist $(\mathbf{Y}|\mathbf{X} = x) = x + (\mathbf{N}|\mathbf{X} = x)$, wobei aber wegen der statistischen Unabhängigkeit zwischen \mathbf{X} und \mathbf{N} der Zusammenhang $(\mathbf{N}|\mathbf{X} = x) = \mathbf{N}$ besteht und somit Gleichung (1) folgt.

und in logarithmischem Maß gilt

$$\begin{aligned} \text{SNR}_q^{(\text{dB})} &= 10 \log_{10}(\text{SNR}_q) \text{dB} = 10 \log_{10}(m^2 - 1) \text{dB} \underset{m \gg 1}{\approx} 20 \log_{10}(m) \text{dB} \\ &= 20 \frac{\log_2(m)}{\log_2(10)} \text{dB} \approx 6.0206 \text{ dB}. \end{aligned}$$

Beispiel 9 — SNR einer PCM-Audioübertragung

- (a) Das Blockschaltbild des PCM-Systems ist in Abbildung 8 dargestellt.

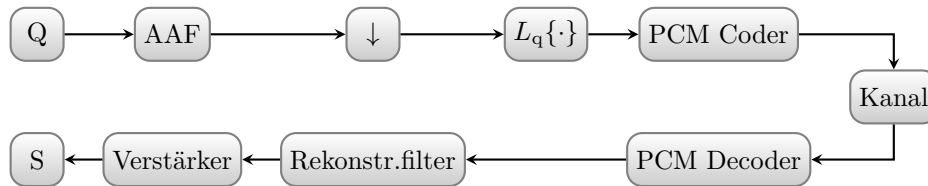


Abbildung 8: Blockschaltbildes des PCM-Systems.

- (b) Nach dem Abtasttheorem muss die Abtastfrequenz mindestens doppelt so hoch wie die höchste im abgetasteten Signal auftretende Frequenz gewählt werden. Das eigentliche Nutzsinal selbst hat zwar nur 16 kHz, jedoch bietet das Anti-Aliasing-Filter erst ab 20 kHz eine ausreichende Dämpfung. Da überhalb von 16 kHz noch Störsignale und Rauschen auftreten können, muss die Abtastfrequenz mit $f_s = 2 \cdot 20 \text{ kHz} = 40 \text{ kHz}$ gewählt werden.
- (c) Mit dem Verhältnis Spitzenleistung/mittlerer Leistung von $\alpha^{(\text{dB})} = 15 \text{ dB}$ gilt

$$\text{SNR}_q^{(\text{dB})} = \text{SNR}_{q,\text{max}}^{(\text{dB})} - \alpha^{(\text{dB})} = 40 \text{ dB} - 15 \text{ dB} = 25 \text{ dB} \quad (6)$$

und in linearem Maßstab

$$\text{SNR}_q = 10^{\frac{\text{SNR}_q^{(\text{dB})}}{10}} \approx 316.2278.$$

- (d) Die Codewortlänge ist die Anzahl an Bits die für das geforderte Spitzen-SNR_q erforderlich ist. Aus dieser Bedingung folgt

$$\begin{aligned} \text{SNR}_{q,\text{max}}^{(\text{dB})} &\geq 40 \text{ dB} \\ \text{SNR}_{q,\text{max}} &\geq 10^{\frac{40}{10}} \\ 3 \cdot (2^n)^2 &\geq 10^4 \\ n &\geq \log_2 \left(\sqrt{\frac{10^4}{3}} \right) = \log_2 \left(\frac{10^2}{\sqrt{3}} \right) \approx 5.8514. \end{aligned}$$

Es sind also mindestens 6 Bits notwendig, $n = 6$.

- (e) Für jeden Abtastwert muss ein Codewort mit n Bits übertragen werden. Die gesamte Bitrate R_b ist daher

$$R_b = f_s n \cdot 1 \text{ bit} = 240 \text{ kbit s}^{-1}.$$

- (f) Nach der Rekonstruktion des analogen Signals auf der Empfängerseite ist das SNR durch zwei Faktoren beeinträchtigt: durch die Quantisierung und durch die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei

der Übertragung, die sich im PCM-Decoder in einen Amplitudenfehler umsetzt. Damit kann auch der Einfluss der Bitfehlerwahrscheinlichkeit als Rauschen aufgefasst werden. Das SNR_{out} ist damit (siehe [1] Kapitel 5.7.2)

$$\text{SNR}_{\text{out}} = \frac{\mathbb{E}[\hat{S}^2]}{\mathbb{E}[E^2] + \mathbb{E}[E_D^2]} = \frac{\text{SNR}_q}{1 + 4P\{\mathcal{E}\}\text{SNR}_q}$$

Im logarithmischen Maßstab berechnet sich das SNR_{out} zu

$$\text{SNR}_{\text{out}}^{(\text{dB})} = 10 \log_{10}(\text{SNR}_{\text{out}}) = 24.9945.$$

Dieser Wert liegt nur knapp unterhalb von $\text{SNR}_q^{(\text{dB})}$. Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei der Übertragung beeinträchtigt das SNR am Ausgang des PCM-Decoders also nur sehr wenig und das $\text{SNR}_{\text{out}}^{(\text{dB})}$ ist hauptsächlich durch die gewählte Quantisierung durch $\text{SNR}_q^{(\text{dB})}$ bestimmt.

- (g) Werden ein oder mehrere zusätzliche Bits Δn für die Quantisierung verwendet, so erhöht sich der Bedarf an Bandbreite. Es reduziert sich aber auch das Quantisierungsrauschen und das SNR_q steigt. Die Anzahl der Codewörter pro Zeit bleibt gleich (f_s), jedoch erhöht sich die Anzahl der Bits pro Codewort und damit die Bitrate R_b sowie die Bandbreite B gemäß

$$\begin{aligned} \Delta R_b &= f_s \Delta n \cdot 1 \text{ bit} \\ \Delta B &= f_s \Delta n. \end{aligned} \tag{7}$$

Analog zu Gleichung (6) lässt sich diese Erhöhung der Bitanzahl in eine Verbesserung des Signal/Rauschverhältnisses gegenüber dem Quantisierungsrauschen darstellen. Es ist

$$\begin{aligned} \text{SNR}_q^{(\text{dB})} &= \text{SNR}_{q,\text{max}}^{(\text{dB})} - \alpha^{(\text{dB})} = 10 \log_{10} \left(3 \cdot 2^{2(n+\Delta n)} \right) - \alpha^{(\text{dB})} \\ &= 10 \log_{10}(3) + 20 \log_{10}(2)(n + \Delta n) - \alpha^{(\text{dB})} \\ &= 10 \log_{10}(3) + 20 \log_{10}(2)n + \underbrace{20 \log_{10}(2)\Delta n}_{=\Delta \text{SNR}_q^{(\text{dB})}} - \alpha^{(\text{dB})}. \end{aligned}$$

Nur noch ein Term enthält die Änderung der Bitanzahl, woraus

$$\Delta \text{SNR}_q^{(\text{dB})} = 20 \log_{10}(2)\Delta n \approx 6.0206\Delta n$$

folgt. Dies bedeutet einen Gewinn an SNR_q von 6 dB für jedes zusätzliche Bit Δn . Der Bandbreitenänderung ΔB gegenüber gestellt bedeutet dies mit Gleichung (7)

$$\Delta \text{SNR}_q^{(\text{dB})} = \frac{20 \log_{10}(2)}{f_s} \Delta B \approx 0.1505 \text{ kHz}^{-1} \Delta B$$

Beispiel 10 — Intersymbolinterferenz bei Matched Filter

- (a) Abbildung 9a zeigt eine Skizze von $S_0(j\omega)$.
- (b) Zur Berechnung des Zeitsignales $s_0(t)$ aus dem Spektrum $S_0(j\omega)$ werden einige Eigenschaften der Fouriertransformation benutzt.

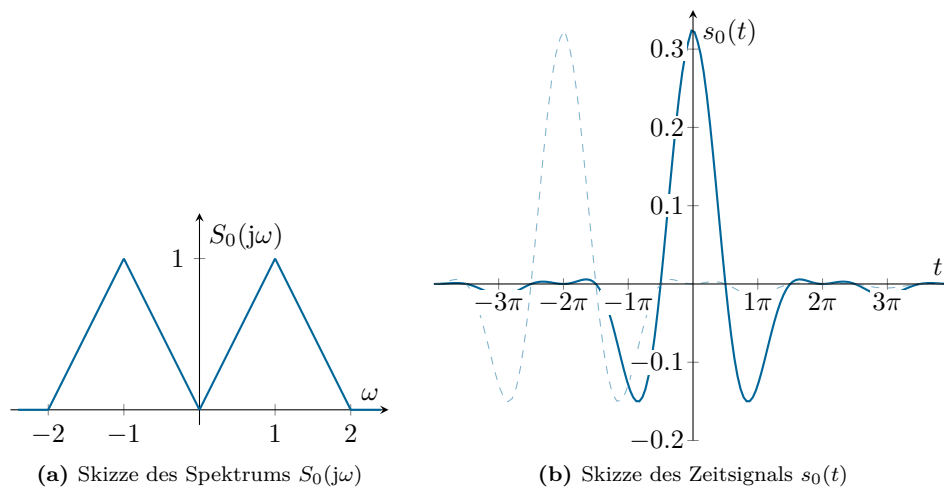


Abbildung 9: Skizze des Spektrums $S_0(j\omega)$ und des Zeitsignals $s_0(t)$

Dualität	$x(t) \circ \bullet X(j\omega)$	\iff	$X(t) \circ \bullet 2\pi x(-\omega)$
Frequenzverschiebung	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	\iff	$X(j(\omega - \omega_0))$
Produkt im Zeitbereich	$x_1(t)x_2(t)$	\iff	$\frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

Aus der Dualität folgt der Zusammenhang

$$\text{rect}(t) \circ \bullet \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \iff \text{sinc}\left(\frac{t}{2}\right) \circ \bullet 2\pi \text{rect}(-\omega) = 2\pi \text{rect}(\omega),$$

womit ein einzelnes Dreieck $\text{tri}(\omega)$ gemäß

$$\text{tri}(\omega) = \text{rect}(\omega) * \text{rect}(\omega) \circ \bullet 2\pi \frac{1}{(2\pi)^2} \text{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

transformiert werden kann. Das vollständige Zeitsignal ergibt sich durch frequenzverschobenes Addieren zweier Dreiecke im Frequenzbereich nach

$$S_0(j\omega) = \text{tri}(\omega + 1) + \text{tri}(\omega - 1) \circ \bullet \frac{1}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right) (e^{jt} + e^{-jt}) = \frac{1}{\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right) \cos(t) = s_0(t).$$

Das Zeitsignal $s_0(t)$ ist in Abbildung 9b dargestellt.

- (c) Abbildung 9b zeigt neben dem Zeitsignal $s_0(t)$ auch ein verschobenes Signal $s_0(t + T_s)$. Dieses erfüllt mit $T_s = 2\pi$ das Nyquist ISI-Kriterium im Zeitbereich, denn zu allen Zeitpunkten $t = nT_s$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) gilt $s_0(nT_s) = 0$ durch die Nullstellen der sinc-Funktion.

Das Nyquist ISI Kriterium kann auch im Frequenzbereich angewandt werden. Die Formulierung im Frequenzbereich fordert, dass die Summe des mit ω_0 periodisch fortgesetzten Spektrums $S_0(j\omega)$ ein konstantes Spektrum ergibt. Tatsächlich findet sich mit $\omega_0 = 1$ eine solche Periode im Frequenzbereich. Es folgt wiederum

$$T_s = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{\frac{\omega_0}{2\pi}} = 2\pi$$

und damit ist das Signal $s_0(t)$ ISI-frei.

- (d) Die Impulsantwort des Matched Filter lautet gemäß [1] Gleichung (8.31)

$$h(t) = k s_0^*(T_0 - t) = k s_0(t), \quad (8)$$

wobei die Konjugation entfällt, da es sich bei $s_0(t)$ um ein reelles Signal handelt. T_0 wird beim Matched Filter so gewählt, dass die entstehende Impulsantwort kausal wird, d.h. $h(t) = 0$ für $t < 0$. $s_0(t)$ ist jedoch ein nicht-kausales Signal, das sich über alle $t \in \mathbb{R}$ erstreckt und kann durch eine Zeitverschiebung daher nicht kausal werden. Es wird daher $T_0 = 0$ gewählt und das Matched Filter ist daher ebenfalls nicht-kausal.

- (e) Gleichung (8) lautet im Frequenzbereich

$$H(j\omega) = k S_0(j\omega)$$

und damit ergibt sich das Ausgangssignal $Y(j\omega)$ des Matched Filter zu

$$Y(j\omega) = S_0(j\omega)H(j\omega) = S_0(j\omega)kS_0(j\omega) = k|S_0(j\omega)|^2.$$

Das Ausgangssignal ist also proportional zu $|S_0(j\omega)|^2$, welches in Abbildung 10a mit dem zugehörigen Zeitsignal in Abbildung 10b dargestellt ist. Wird das Nyquist ISI Kriterium nun darauf im Frequenzbereich angewandt, so findet man keine Periode ω_0 , sodass die Summe des periodischen Spektrums eine Konstante wird. Auch im Zeitbereich (Abbildung 10b) ist deutlich sichtbar, dass das Zeitsignal zu allen Entscheidungszeitpunkten $t = n T_s$ ($n \in \mathbb{Z}$) von Null verschieden ist. Das Signal ist daher am Ausgang nicht ISI-frei.

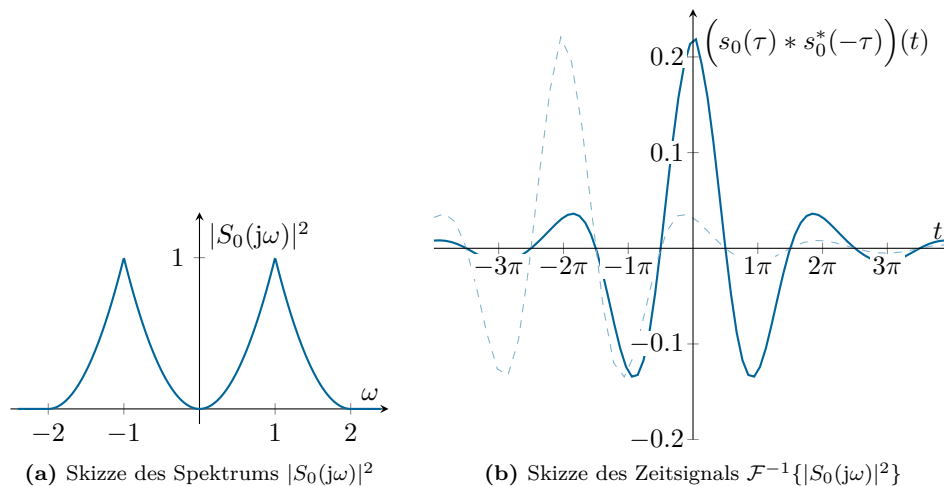


Abbildung 10: Skizze des Spektrums $|S_0(j\omega)|^2$ und des Zeitsignals $\mathcal{F}^{-1}\{|S_0(j\omega)|^2\}$

- (f) Obwohl das Signal am Übertragungskanal ISI-frei ist, gibt es am Ausgang des Matched Filter die ungewünschte Inter-Symbolinterferenz. Dieses Beispiel zeigt, dass für eine sinnvolle Übertragung das gesamte Übertragungssystem betrachtet werden muss und dieses als Gesamtheit ISI-frei sein muss. Nur die ISI-Freiheit am Kanal alleine ist noch nicht ausreichend.

Um ISI beim vorliegenden System nun zu vermeiden, muss beispielsweise der Matched Filter-Empfänger und der Impulsformer durch $H(j\omega) = k\sqrt{|S_0(j\omega)|}$ ersetzt werden. Nach der Übertra-

gung ergibt sich dann $Y(j\omega) = k|S_0(j\omega)|$, welches wieder ISI-frei ist, wie Abbildung 9a zeigt. Auf dem Kanal selbst wird sehrwohl ISI auftreten. Dies ist aber unerheblich, solange zum Entscheidungszeitpunkt nach dem Matched Filter keine Interferenz mehr vorliegt. Ein Anwendungsbeispiel dieser Methode ist das *Root Raised Cosine*-Filter, siehe [1], Kapitel 8.4.

Beispiel 11 — Manchester-Codierung auf einer Telegrafenerleitung

- (a) Das entstehende Signal ist in Abbildung 11 dargestellt
- (b) Durch die Verwendung von nur 2 Symbolen und der Linearität der Korrelation kann man das Matched Filter auf die auf die Einkorrelator-Variante reduzieren. Somit lautet das Referenzsignal $s_{\text{ref}}(t) = s_1(t) - s_0(t)$. Für nähere Information sei auf [1], Kapitel 8.3.2 verwiesen.
- (c) Vorerst werden die verwendete Größen berechnet. Durch die Dämpfung d und die Impedanz Z_0 berechnet sich die Signalenergie am Sender durch $E_t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|s(t)|^2}{Z_0} dt$ und am Empfänger durch $E_r = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|ds(t)|^2}{Z_0} dt$.

$$E_{1,r} = E_{0,r} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|ds_0(t)|^2}{Z_0} dt = \frac{d^2}{Z_0} \left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^0 | -A|^2 dt + \int_0^{\frac{T_0}{2}} |A|^2 dt \right) = \frac{d^2 A^2 T_0}{Z_0} = d^2 E$$

$$\rho = \rho_{10}(T=0) = -1 \quad (\text{Manchester-Codierung verwendet antipodale Signalformen})$$

$$\Delta V = E_{1,r} + E_{0,r} - 2\rho\sqrt{E_{1,r}E_{2,r}} = 4d^2 E$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2} \Delta V}$$

$$T_0 = \frac{1}{R_s} = 5 \mu\text{s}$$

$$N_0 = 10^{\frac{N_0(\text{dB})}{10}} \cdot 1 \text{ mW} = 10^{-18} \text{ W Hz}^{-1}$$

Mit diesen Ergebnissen kann man die Gleichung für die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit aufstellen.

$$P_e = \frac{1}{2} \left(1 - \text{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta V}{2\sigma} \right) \right) = Q \left(\frac{\Delta V}{2\sigma} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{\Delta V}{2N_0}} \right) \stackrel{!}{=} 10^{-9}$$

Mittels Nomogramm folgt

$$\sqrt{\frac{\Delta V}{2N_0}} \stackrel{!}{=} 6.0.$$

Durch Einsetzen in die oben ermittelten Ausdrücke und Umformen folgt

$$d = \sqrt{\frac{18N_0Z_0}{A^2T_0}} = 4.2426 \cdot 10^{-6} \Rightarrow 20 \cdot \log_{10}(4.2426 \cdot 10^{-6}) = -107.447 \text{ dB}$$

Die maximal erlaubte Dämpfung ist somit 107.447 dB und die zugehörige Länge l berechnet sich durch

$$d = l\alpha \implies l = \frac{d}{\alpha} = \frac{107.447 \text{ dB}}{3.5 \frac{\text{dB}}{100 \text{ m}}} = 3.07 \text{ km}.$$

- (d) Da der Empfänger keine Auskunft über den Ausfall von s_1 bekommt, integriert der Korrelationsempfänger bei Empfang von $s_1 = 0$ nur Rauschen ohne jeglichen Informationsgehalt. Daher

gilt $P\{0|s_1\} = \frac{1}{2}$ und man kann die gesamte Fehlerwahrscheinlichkeit berechnen.

$$P_e = \underbrace{P\{0|s_1\}}_{\frac{1}{2}} \underbrace{P\{s_1\}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P\{1|s_0\}}_{10^{-9}} \underbrace{P\{s_0\}}_{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{4}$$

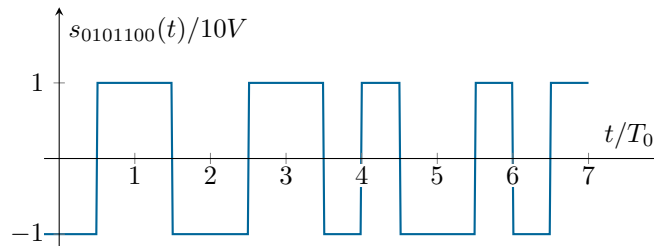


Abbildung 11: Sendesignal bei der Eingangsdatenfolge (0101100)

Beispiel 12 — Binäres Basisbandsystem

- (a) Die Signale sind in Abbildung 12 und das Kommunikationssystem 13 dargestellt.
 (b) Das Referenzsignal lautet $s_{\text{ref}} = s_1 - s_0$. Genauere Erklärung ist in Beispiel 11 (b) nachzulesen.
 (c) Vorerst werden die notwendigen Werte berechnen. Durch die Dämpfung d berechnet sich die Signalenergie am Sender durch $E_t = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$ und am Empfänger durch $E_r = \int_{-\infty}^{\infty} |ds_0(t)|^2 dt$.

$$\begin{aligned} E_{1,r} &= \int_{-\infty}^{\infty} |ds_1(t)|^2 dt = d^2 \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} 1^2 dt = d^2 \\ E_{0,r} &= \int_{-\infty}^{\infty} |ds_0(t)|^2 dt = 2d^2 \int_0^{\frac{1}{2}} |2t - 1|^2 dt = \frac{d^2}{3} \\ \rho &= \rho_{01,r}(T=0) = \frac{1}{\sqrt{E_{0,r}E_{1,r}}} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 s_0(t)s_1(t) dt = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) \cdot (-\text{tri}(2t)) dt \\ &= \sqrt{3} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^0 (-2t - 1) dt + \int_0^{\frac{1}{2}} (2t - 1) dt \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Delta V &= E_{0,r} + E_{1,r} - 2\rho\sqrt{E_{0,r}E_{1,r}} = d^2 \left(\frac{1}{3} + 1 + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 \cdot \frac{1}{3}} \right) \\ &= \left(10^{-\frac{50 \text{ dB}}{20}} \right)^2 \left(\frac{1}{3} + 1 + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 \cdot \frac{1}{3}} \right) = \frac{7}{3} \cdot 10^{-5} \\ \sigma &= \sqrt{\frac{N_0}{2} \Delta V} \end{aligned}$$

Anschließend wird die Gleichung aufgestellt und mit Hilfe des Nomogramms

$$P_e = Q\left(\frac{\Delta V}{2\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\Delta V}{2N_0}}\right) \stackrel{!}{=} 10^{-6} \underset{\text{Nomogramm}}{\implies} \sqrt{\frac{\Delta V}{2N_0}} \stackrel{!}{=} 4.7534$$

nach der Rauschleistungsdichte N_0 aufgelöst

$$N_0 = \frac{\Delta V}{2 \cdot 4.7534^2} = \frac{\frac{7}{3} \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 4.7534^2} = 5.16 \cdot 10^{-7}.$$

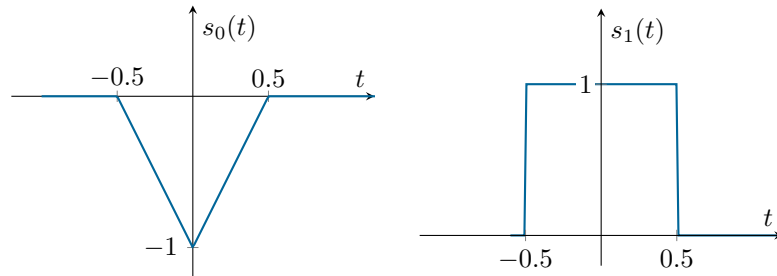


Abbildung 12: verwendete Signale

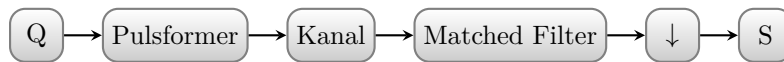


Abbildung 13: Blockschaltbild des Kommunikationssystem

Literatur

- [1] Ian Glover and Peter Mitchell Grant. *Digital Communications*. Pearson Education Canada, 3rd edition, 2009.