389.138 Telekommunikation – 2014S
2. Übung

05.05.2014 – 09.05.2014

Einen Überblick über die in der Übung verwendete Notation finden Sie in TUWEL.

Beispiel 1 — Huffman Codierung

Eine diskrete Quelle S liefert fünf Symbole $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, die gemäß der Wahrscheinlichkeitsfunktion p_S verteilt sind:

$$p_\mathsf{S}(s_1) = 0.4,\ p_\mathsf{S}(s_2) = 0.35,\ p_\mathsf{S}(s_3) = 0.15,\ p_\mathsf{S}(s_4) = 0.06 \text{ und } p_\mathsf{S}(s_5) = 0.04 \tag{1}$$

Diese sollen mit dem Verfahren von Huffman codiert werden und über einen binären Kanal übertragen werden.

(a) Welche Entropie besitzt die Quelle?

(b) Wie groß ist die Redundanz der Quellsymbole?

(c) Konstruieren Sie den Huffman-Code mit Hilfe des Code-Baumes. *Hinweis: Codiervorschrift: Pfad mit höherer Wahrscheinlichkeit mit* `0`*, Pfad mit niedriger Wahrscheinlichkeit mit* 1 *codieren.*

(d) Welche Code-Effizienz ergibt sich mit dem von Ihnen entworfenen Code?

(e) Decodieren Sie, sofern möglich, den Datenstrom `00110111100` in eine Abfolge von Quellsymbolen.

(f) Geben Sie eine Codierung an, die zwar den Quellsymbolen unterschiedliche Bitfolgen zuweist, aber dennoch nicht eindeutig decodierbar ist.

(g) Geben Sie in Beispiel für ein Codierverfahren an, welches zwar eindeutig, aber nicht fortlaufend decodierbar ist.

(h) *Bonus: Welche Bedingung an die Auftrittswahrscheinlichkeiten $p_\mathsf{S}(s)$ ist (im Allgemeinen) hinreichend und notwendig damit der Huffman-Code die Code-Effizienz 1 besitzt?*

Beispiel 2 — Entropie

Die Zufallsvariable X aus $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ ist gemäß einer Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_\mathsf{X}(x)$ verteilt. Sie stehen vor der Aufgabe den Wert einer konkreten Realisierung von X durch eine Reihe von Ja/Nein-Fragen herauszufinden. Die Fragen sind im Allgemeinen von der Gestalt "$\mathsf{X} \in \mathcal{C}$?", wobei $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$. Die nächste Frage darf von den Antworten auf die vorhergehenden Fragen abhängen. *Hinweis: Z.B. könnten Sie den Wert von X durch die N Fragen "$\mathsf{X} \in \{n\}$?" für $n \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ erfragen. Diese Strategie führt immer in maximal N Fragen zur Lösung.*

(a) Geben Sie eine Strategie an, die in maximal $\lceil \log_2(N) \rceil$ Fragen zur Lösung führt.

(b) Ist die Strategie aus Punkt (a) optimal? Wenn nein, geben Sie eine bessere Strategie an.

(c) Wenn Sie die Strategie aus Punkt (a) bei einer Gleichverteilung $p_\mathsf{X}(x) = \frac{1}{N}$ anwenden, wie groß ist die mittlere Anzahl an Fragen (d.h. der Erwartungswert der Anzahl) die gestellt werden?

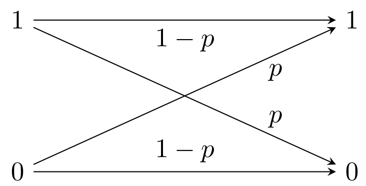

Abbildung 1: Binary Symmetric Channel aus Beispiel 3

(d) Geben sie eine Strategie an, die die mittlere Anzahl an gestellten Fragen für $N = 5$ und $p_{\mathsf{X}}(x) = p_{\mathsf{S}}(s_x)$ aus Gleichung (1), optimiert. *Hinweis: Verwenden Sie Beispiel 1.*

(e) Erklären Sie den Zusammenhang zwischen der mittleren Anzahl an Fragen und der Entropie von X.

(f) *Bonus: Geben Sie eine optimale Strategie für $\mathcal{X} = \mathbb{N}$ und $p_{\mathsf{X}}(x) = 2^{-x}$ an. Wie viele Fragen müssen im Mittel gestellt werden?*

Beispiel 3 — Binary Symmetric Channel

Ein *Binary Symmetric Channel (BSC)* ist charakterisiert durch die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion (=Übergangswahrscheinlichkeit, siehe Abb. 1)

$$p_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y|x) = \begin{cases} p & x \neq y \\ 1-p & x = y \end{cases},$$

wobei x das Eingangsbit, y das Ausgangsbit und p die Fehlerwahrscheinlichkeit bezeichnen. Es werden nun Blöcke $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ über den BSC gesendet, wobei dieser die Bits unabhängig voneinander stört, d.h.

$$\mathrm{P}\{\mathbf{Y} = \mathbf{y}|\mathbf{X} = \mathbf{x}\} = p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} p_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y_i|x_i).$$

(a) Gegeben Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ mit $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k \leq n$, berechnen Sie $\mathrm{P}\{\mathbf{Y} = \mathbf{y}|\mathbf{X} = \mathbf{x}\}$.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass für einen gegebenen Vektor $\mathbf{x}$ ein Vektor $\mathbf{y}$ mit $k \leq n$ beliebig angeordneten Fehlern auftritt.

(c) Hängen die in den Punkten (a) und (b) berechneten Werte von der konkreten Wahl von $\mathbf{x}$ (bzw. $\mathbf{y}$) ab? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Handelt es sich bei dem Kanal $p_{\hat{\mathsf{X}}|\mathsf{X}}(\hat{x}|x)$ aus Beispiel 4 der ersten Übung um einen BSC? Falls ja, geben Sie p an.

(e) Zeigen Sie, dass die Übertragung von Blöcken über einen BSC eine neue Zufallsvariable K für die Anzahl der fehlerhaften Bits im Empfangswort definiert und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_{\mathsf{K}}(k)$ an. Finden Sie außerdem einen Ausdruck für $\mathrm{P}\{\mathsf{K} \leq K\}$.

Beispiel 4 — Kanalkapazität

In der Informationstheorie wird ein Kanal durch einen stochastischen Übergang des deterministischen Kanaleingangs x zu einem zufälligen Kanalausgang Y charakterisiert, welcher ganz allgemein als bedingte Wahrscheinlichkeits(dichte)funktion $p_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y|x)$ bzw. $f_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y|x)$ einem gegebenen Kanaleingang x

eine Verteilung des Kanalausgangs zuordnet[1]. Werden nun nR Bits umkehrbar eindeutig in Blöcke $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ der Länge n codiert und über den Kanal gesendet[2] (entsprechend R Bits pro Benutzung des Kanals $p_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y|x)$ bzw. $f_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y|x)$), so lässt sich zeigen, dass fehlerfreie Übertragung bis zu einer Rate $R \leq C$ für $n \to \infty$ möglich ist und für $R > C$ unmöglich ist. Die *Kanalkapazität* C hängt dabei von der Beschaffenheit des Kanals $p_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y|x)$ bzw. $f_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y|x)$ ab.

(a) Für einen AWGN Kanal mit $f_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y|x) = f_{\mathsf{N}}(y - x)$ lässt sich zeigen, dass

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right) \text{ Bit/Übertragung} \tag{2}$$

ist, wobei σ^2 die Varianz des Rauschens N ist und P die Sendeleistung ist. Leiten Sie daraus den bekannten Zusammenhang

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{P}{BN_0} \right) \text{ Bit/s} \tag{3}$$

für einen bandbreitebeschränkten AWGN Kanal mit der Bandbreite B her.

Hinweis: Interpretieren Sie Gleichung (2) *mit* $\sigma^2 = N_0 B$ *als Bits/Sample und überlegen Sie, wie viele Samples Sie in einer bestimmten Zeit* T *über einen Kanal der Bandbreite* B *senden können. (Abtasttheorem!)*

(b) Skizzieren Sie Gleichung (3) für konstantes P/N_0 als Funktion von B sowie für konstantes B als Funktion von P/N_0.

(c) Berechnen sie $\lim_{B\to\infty} C$ und markieren Sie den Grenzwert in Ihrer Skizze aus Punkt (b). Argumentieren Sie, warum C bei unendlicher Bandbreite nicht unendlich groß wird.

Hinweis: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \mathrm{e}$

Beispiel 5 — Binäre, lineare Codes

Ein binärer, linearer Blockcode der Länge n ist eine nichtleere Menge $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{GF}(2)^n$ für die gilt

$$\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathcal{C} \implies \mathbf{c} + \mathbf{c}' \in \mathcal{C} \,. \tag{4}$$

(a) Zeigen Sie, dass das Nullwort $\mathbf{0}$ in jedem linearen Code enthalten ist.

(b) Zeigen Sie $\mathrm{d}(\mathbf{c}, \mathbf{c}') = \mathrm{w}(\mathbf{c} + \mathbf{c}')$.

(c) Zeigen Sie, dass für lineare Codes $\mathcal{C}$ die minimale Hamming Distanz zwischen zwei unterschiedlichen Codewörtern $d_{\min}(\mathcal{C})$ gleich dem minimalen Gewicht des Codes

$$w_{\min}(\mathcal{C}) = \min_{\mathbf{c} \in \mathcal{C} \setminus \{\mathbf{0}\}} \mathrm{w}(\mathbf{c}) \tag{5}$$

entspricht. *Hinweis: Verwenden Sie Punkt (b).*

(d) Zeigen Sie, dass es für einen binären, linearen Blockcode immer eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für die Anzahl der Codewörter gilt $|\mathcal{C}| = 2^k$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\mathcal{C}$ *ein linearer Vektorraum über* $\mathrm{GF}(2)$ *ist und als solcher eine Basis besitzt.*

[1] Z.B. ergibt für einen AWGN Kanal mit $\mathsf{Y} = \mathsf{X} + \mathsf{N}$ der Kanal als $f_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y|x) = f_{\mathsf{N}}(y - x)$ bzw. für den BSC aus Beispiel 3 ergibt sich $p_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y|x)$ aus der Fehlerwahrscheinlichkeit p.

[2] Vgl. Beispiel 3.

(e) Wie bereits erwähnt, besitzt ein binärer, linearer Blockcode die Struktur eines linearen Vektorraumes. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Basisvektoren von $\mathcal{C}$ und der Generatormatrix $\mathbf{G}$?

Beispiel 6 — Blockcode

Gegeben sei der folgende binäre Blockcode $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

(a) Ist $\mathcal{C}$ linear? Handelt es sich um einen zyklischen Code? Bestimmen Sie n, k und die Coderate.

(b) Stellen Sie die Generatormatrix $\mathbf{G}$ und die Checkmatrix $\mathbf{H}$ von $\mathcal{C}$ auf. Sind diese Matrizen eindeutig bestimmt? Wenn nein, geben Sie eine weitere Generatormatrix $\mathbf{G}'$ und Checkmatrix $\mathbf{H}'$ für $\mathcal{C}$ an. Ist $\mathbf{H}'\mathbf{G}^T = \mathbf{0}$ erfüllt?

(c) Ist $\mathcal{C}$ systematisch? Ist dies unabhängig von der Generatormatrix $\mathbf{G}$?

(d) Gibt es eine Generatormatrix für $\mathcal{C}$ in der Normalform $\mathbf{G} = (\mathbf{I}_K, \mathbf{P})$?

(e) Geben Sie das minimale Hamming-Gewicht und die minimale Hamming-Distanz an.

(f) Wieviele Bitfehler können erkannt/korrigiert werden? Dekodieren Sie, sofern möglich, mithilfe des Syndroms die Empfangswörter

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T \text{ und } \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T.$$

Beispiel 7 — Linearer Blockcode

Gegeben sei der lineare, binäre (n,k)-Code $\mathcal{C}$ mit der Parity Check Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie n, k und die Coderate.

(b) Geben Sie die Generatormatrix $\mathbf{G}$ an. Überprüfen Sie, ob $\mathbf{H}\mathbf{G}^T = \mathbf{0}$ erfüllt ist.

(c) Geben Sie alle Codewörter an. Ist $\mathcal{C}$ systematisch? Ist $\mathcal{C}$ zyklisch?

(d) Geben Sie das minimale Hamming-Gewicht und die minimale Hamming-Distanz an.

(e) Wieviele Bitfehler können erkannt/korrigiert werden?

(f) Der Code soll mit Hilfe eines Syndroms decodiert werden. Wie bezeichnet man die Menge der Empfangswörter $\mathbf{r}$ für die gilt $\mathbf{H}\mathbf{r} = \mathbf{0}$? Dekodieren Sie, sofern möglich, mithilfe des Syndroms die Empfangswörter

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T \text{ und}$$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T.$$

(g) *Bonus: Gibt es ein Empfangswort* $\mathbf{r}$*, das durch Syndromdecodierung nicht eindeutig decodiert werden kann? Falls ja, so geben Sie dieses an.*

Beispiel 8 — Blockcode mit Paritätsgleichungen

Ein Codierer bildet ein Datenwort $\mathbf{d} \in \mathrm{GF}(2)^2$ auf ein Codewort $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ ab, gemäß

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix}d_1 & d_2\end{pmatrix}^T \mapsto \mathbf{c} = \begin{pmatrix}c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{pmatrix}^T \quad d_i, c_i \in \mathrm{GF}(2),$$

wobei

$$c_1 = d_1,\ c_2 = d_2,\ c_3 = d_1 + d_2 \ \text{ und } \ c_4 = (d_2 \wedge \neg d_2) \vee d_1.$$

Ein weiterer Code $\mathcal{C}'$ ist gegeben durch

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix}d_1 & d_2\end{pmatrix}^T \mapsto \mathbf{c} = \begin{pmatrix}c'_1 & c'_2 & c'_3 & c'_4 & c'_5 & c'_6\end{pmatrix}^T \quad d_i, c'_i \in \mathrm{GF}(2)$$

mit

$$c'_i = c_i \ \text{ für } i \leq 4,\ c'_5 = d_2 \ \text{ und } \ c'_6 = d_1 \vee d_2.$$

Hinweis: Die binären Operationen "$\wedge$" und "$\vee$" sind definiert durch

$$a \wedge b \triangleq \begin{cases}1 & a = b = 1\\ 0 & \mathit{sonst}\end{cases}, \qquad a \vee b \triangleq \begin{cases}0 & a = b = 0\\ 1 & \mathit{sonst}\end{cases}.$$

Beantworten Sie die folgenden Fragen jeweils für beide Codes $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$:

(a) Welche Coderate besitzt der Code? Wie viele Codewörter existieren? Geben Sie die verwendeten Codewörter an.

(b) Handelt es sich um einen systematischen Code? Handelt es sich um einen linearen Code? Begründen Sie!

(c) Bestimmen Sie die minimalen Hamming-Distanz $d_{\min}$ und das minimale Hamming-Gewicht $w_{\min}$.

(d) Wie viele *beliebig* angeordnete Bitfehler können prinzipiell korrigiert und wie viele prinzipiell erkannt werden?

(e) Führen Sie, falls möglich, eine fehlerkorrigierende Decodierung der beiden Empfangswörter $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}'_2$ durch, wobei

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{r}'_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T.$$

(f) Die Wahrscheinlichkeit eines Bitfehlers sei $P_b = 10^{-2}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erkennt ein Decoder (der Fehler lediglich erkennt, aber nicht korrigiert) die Fehler im Block nicht? Begründen Sie Ihren Rechengang.

Beispiel 9 — Faltungscode

Ein Datenstrom mit Symbolen aus GF(2) wird mit Hilfe eines Faltungscodes gesichert. Der Codierer verwendet die Polynome $p_1(x) = 1 + x + x^2$, $p_2(x) = x + x^2$ und $p_3(x) = 1 + x^2$.

(a) Fertigen Sie eine Skizze des Codierers, bestehend aus 3 FIR Filtern und einem Parallel-zu-Seriell Wandler an. *Hinweis: Die Filter sollen als Transversalfilter mit gemeinsamen Verzögerungselementen ausgeführt werden. Weiters ist* $H_i(z) = p_i(z^{-1})$ *die Übertragungsfunktion von Filter* $i = 1, 2, 3$.

(b) Welche Coderate besitzt der Codierer? Ist der Code linear? Woher stammt der Name Faltungscode?

(c) Skizzieren Sie das Zustandsdiagramm des Codierers.

(d) Encodieren Sie das Datenwort `111`. Nehmen Sie dazu an, dass sich der Codierer im Nullzustand befindet, und codieren die das erweiterte Datenwort `11100`, welches den Codierer nach der Übertragung wieder in den Nullzustand versetzt.

(e) Decodieren Sie mit Hilfe des Viterbialgorithmus das Empfangswort `001001100011110`. Nehmen Sie dazu an, dass der Codierer im Nullzustand war und dass das codierte Datenwort mit zwei Nullen erweitert wurde, um den Codierer wieder in den Nullzustand zu versetzten. Wie viele Fehler wurden korrigiert?

(f) Würde sich das decodierte Datenwort ändern, wenn Sie nicht davon ausgehen könnten, dass der Codierer mit zwei Nullen abschließt?

Beispiel 10 — Komplexität von Kanalcodierungsverfahren

In diesem Beispiel soll die Komplexität unterschiedlicher Codier- und Decodierverfahren untersucht werden. Dabei werden die Anzahl der Multiplikations- und Additions-Operationen sowie der Speicherbedarf als Indikatoren herangezogen.

(a) Ein linearer (n, k)-Blockcode mit minimaler Distanz $d_{\min}$ wird verwendet, um so viele Fehler wie möglich mittels Syndromdecodierung zu korrigieren. Zeigen Sie, dass pro Empfangswort $\mathbf{r} \in \mathrm{GF}(2)^n$ jeweils $(n-k)n$ binäre Multiplikationen und $(n-k)(n-1)$ binäre Additionen notwendig sind um das Syndrom $\mathbf{s} = \mathbf{H}\mathbf{r}$ zu berechnen. Wie viele Syndrome muss der Decodierer speichern?

(b) Ein allgemeiner Codierer bildet die Nachricht $m \in \{1, \ldots, M\}$ bijektiv auf ein Codewort $\mathbf{c} \in \mathcal{C} \subseteq \mathrm{GF}(2)^n$ der Länge n ab, d.h. $\mathbf{c} = f(m)$. Für diesen Code ist die Coderate R das Verhältnis zwischen der Anzahl der Bits, die notwendig sind um m darzustellen und der Blocklänge n. Für ein detektiertes Empfangswort $\mathbf{r}$ entscheidet sich der Decodierer gemäß

$$\hat{m} = f^{-1}\left(\arg\min_{\mathbf{c}\in\mathcal{C}} \mathrm{d}(\mathbf{r}, \mathbf{c})\right).$$

Geben Sie die Coderate an und zeigen Sie, dass der Decodierer $(2n-1)2^{nR}$ Additionsoperationen pro Empfangswort durchführen muss, um das Codewort mit geringster Hamming Distanz zu $\mathbf{r}$ zu finden. Wie viele Codewörter muss der Decodierer speichern?

(c) Berechnen Sie Zahlenwerte für (a) und (b) für $n = 1000$, $R = 0.7$ und $d_{\min} = 3$ bzw. $d_{\min} = 30$.

Beispiel 11 — Bitmapping und Softdecoding

Ein 4-PAM System überträgt gleichwahrscheinliche Symbole, wobei pro Zeitindex i jeweils zwei Bits $(b_i^{(1)}, b_i^{(2)})$ gemäß

$$\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} \mapsto -3, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \mapsto -1, \quad \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} \mapsto 1, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \mapsto 3,$$

auf ein Symbol x_i aus dem Alphabet $\mathcal{X} = \{-3, -1, 1, 3\}$ abgebildet werden. Die Übertragung der Symbole erfolgt über einen AWGN Kanal, d.h. $\mathsf{Y} = \mathsf{X} + \mathsf{N}$ mit normalverteiltem, mittelwertfreiem Rauschen N.

(a) Skizzieren Sie die gewichteten bedingten Dichten $f_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y|x)\mathrm{P}\{\mathsf{X} = x\}$ für alle $x \in \mathcal{X}$ sowie die Entscheidungsschwellwerte für ein SNR von 20 dB, falls die Entscheidungsstrategie aus den Beispielen 3 und 4 der ersten Übung verwendet wird. *Hinweis: Die Varianz des Rauschens ergibt sich aus* $\mathrm{SNR} = 10\log_{10}(\mathbb{E}[\mathsf{X}^2]/\mathbb{E}[\mathsf{N}^2])\mathrm{dB}$.

(b) Der Empfänger detektiert die Symbole $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_4) = (-3.22, 2.001, 1.04, 2.6)$. Geben Sie die zugehörige, detektierte Symbolfolge $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_4)$ sowie die zugehörige detektierte Bitfolge

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix}\hat{b}_1^{(1)} & \hat{b}_1^{(2)} & \hat{b}_2^{(1)} & \hat{b}_2^{(2)} & \hat{b}_3^{(1)} & \hat{b}_3^{(2)} & \hat{b}_4^{(1)} & \hat{b}_4^{(2)}\end{pmatrix}$$

an, unter der Annahme das der Empfänger, die aus dem 1. Übungsblatt bekannte Entscheidungsstratgie verfolgt und sich aus Symmetriegründen für das nächstliegende Symbol entscheidet.

(c) Jedem detektierten Symbol y_i sollen nun anstatt der detektierten Empfangsbits zwei sogenannte *Log-Likelihood-Ratios (LLRs)* zugeordnet werden,

$$L_i^{(k)} \triangleq \log \frac{\mathrm{P}\left\{\mathsf{B}_i^{(k)} = 1|y_i\right\}}{\mathrm{P}\left\{\mathsf{B}_i^{(k)} = 0|y_i\right\}} = \log \frac{\sum_{x:b_k=1} f_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y_i|x)}{\sum_{x:b_k=0} f_{\mathsf{Y}|\mathsf{X}}(y_i|x)}, \qquad k = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, 4, \tag{6}$$

wobei die Summen in Gleichung (6) über alle Symbole x gehen, für die das $k$te Bit 0 bzw. 1 ist und $\mathrm{P}\left\{\mathsf{B}_i^{(k)} = b_i^{(k)}|y_i\right\}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass das $k$te Bit des $i$ten Symbols gleich $b_i^{(k)}$ ist, gegeben dass y_i detektiert wurde. Interpretieren Sie die die Werte der LLRs. Was bedeuten stark positive, stark negative, bzw. Werte nahe bei 0?

(d) Berechnen Sie für die Empfangssymbolfolge aus Punkt (b) die Folge der LLRs

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix}L_1^{(1)} & L_1^{(2)} & L_2^{(1)} & L_2^{(2)} & L_3^{(1)} & L_3^{(2)} & L_4^{(1)} & L_4^{(2)}\end{pmatrix}$$

für ein SNR von 20 dB. Vergleichen Sie das Ergebnis mit $\hat{\mathbf{b}}$ aus Punkt (b). Welche Information geht durch die Schwellwertentscheidung in Punkt (b) für einen möglichen, nachgeschalteten Decoder verloren?