

389.138 Telekommunikation – 2014S

3. Übung

02.06.2014 – 07.06.2014

Einen Überblick über die in der Übung verwendete Notation finden Sie in TUWEL.

Beispiel 1 — Komplexes Rauschen

Durch Matched-Filter Detektion werden Bandpass-Signale auf Punkte in der I/Q-Ebene (Ebene der komplexen Zahlen) abgebildet. Es lässt sich zeigen, dass für einen AWGN Kanal dabei die I- und Q-Komponente unabhängig voneinander verrauscht werden.

Bezeichnet $X^{(I)}$ die I-Komponente (Realteil) und $X^{(Q)}$ die Q-Komponente (Imaginärteil) des gesendeten Konstellationspunkts $X = X^{(I)} + jX^{(Q)}$, so gilt

$$\begin{aligned} Y^{(I)} &= X^{(I)} + N^{(I)} \quad \text{und} \\ Y^{(Q)} &= X^{(Q)} + N^{(Q)}, \end{aligned}$$

wobei $Y^{(I)}$ und $Y^{(Q)}$ die I- bzw. Q-Komponente des empfangenen Werts $Y = Y^{(I)} + jY^{(Q)}$ bezeichnen. $N^{(I)}$ und $N^{(Q)}$ sind dabei zwei unabhängige gaußverteilte Zufallsvariablen mit Varianz $\frac{\sigma^2}{2}$ und Mittelwert $\mu = 0$.

- (a) Berechnen Sie die Varianz von $N = N^{(I)} + jN^{(Q)}$.

Hinweis: Die Varianz der komplexen Zufallsvariable N ist definiert als $\mathbb{V}[N] \triangleq \mathbb{E}[(N - \mu)(N - \mu)^]$.*

- (b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{Y|X}(y|x) = f_{Y^{(I)}, Y^{(Q)}|X^{(I)}, X^{(Q)}}(y^{(I)}, y^{(Q)}|x^{(I)}, x^{(Q)})$ an, wobei $y = y^{(I)} + jy^{(Q)} \in \mathbb{C}$ und $x = x^{(I)} + jx^{(Q)} \in \mathbb{C}$. Wovon hängt $f_{Y|X}(y|x)$ nur ab?
- (c) Zeichnen Sie die Niveaulinien der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_N(n)|_{n=y} = f_{Y|X}(y|0 + j0)$ in das Diagramm in Abb. 1a ein.
- (d) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P\{N^{(I)} \geq a\}$, $0 \leq a \in \mathbb{R}$ an. Verwenden Sie dazu die Q-Funktion. Markieren Sie den entsprechenden Bereich im I/Q-Diagramm, Abb. 1a.
- (e) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P\{Y \in \mathcal{A}|X = 0 + j0\}$ für den in Abb. 1b markierten Bereich \mathcal{A} an. *Hinweis: Überlegen Sie was bei einer Drehung des Koordinatensystems passiert.*
- (f) Für 4-PSK mit $x_1 = 1+j$, $x_2 = -1+j$, $x_3 = 1-j$ und $x_4 = -1-j$ wird nach dem nearest-neighbour Prinzip entschieden. Verwenden Sie Punkt (d) um die Fehlerwahrscheinlichkeit $P\{\hat{X} \neq x_i|X = x_i\}$ zu berechnen¹. Das ist die Wahrscheinlichkeit, dass der decodierte Wert \hat{X} nicht mit dem gesendeten Wert $X = x_i$ übereinstimmt. *Hinweis: Nutzen Sie, dass $Y^{(I)}$ und $Y^{(Q)}$ statistisch unabhängig sind und unterscheiden Sie die einzelnen Fälle “I-Komponente falsch”, “Q-Komponente falsch” bzw. “beide Komponenten falsch”.*

¹Aufgrund der Symmetrie ist dies gleich der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit: $P_s = P\{\hat{X} \neq x_i|X = x_i\} = P\{\hat{X} \neq X\}$

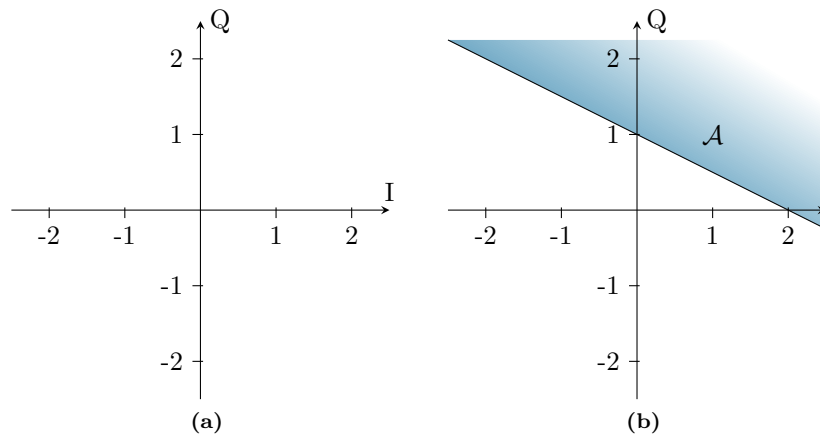


Abbildung 1: I/Q-Diagramme, Beispiel 1

Beispiel 2 — Näherung der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit

Für ISI-freie QAM-Übertragung mit Symbolen $\mathbf{X} \in \mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_M\}$ über einen AWGN-Kanal mit der Rauschleistung σ^2 kann man die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit P_s durch

$$P_s \approx \sum_{m=1}^M N_m \mathcal{Q}\left(\frac{d_m}{\sqrt{2}\sigma}\right) \mathrm{P}\{\mathbf{X} = x_m\} \quad (1)$$

annähern. Dabei gibt d_m den Abstand des Symbols x_m zu seinen nächsten Nachbarn an und N_m ist die Anzahl dieser.

- (a) Für eine Anordnung bei der alle Symbole den gleichen Abstand $d_m = d$ zu ihren nächsten Nachbarn haben vereinfacht sich Gleichung (1) zu

$$P_s \approx \bar{N} \mathcal{Q}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right). \quad (2)$$

Bestimmen Sie \bar{N} aus Gleichung (2) und interpretieren Sie diese Größe.

Nehmen Sie für die weiteren Unterpunkte an, dass alle Symbole gleichwahrscheinlich sind.

- (b) Skizzieren Sie das Konstellationsdiagramm von 4-QAM mit Symbolabstand d und berechnen Sie \bar{N} sowie $\mathbb{E}[\mathbf{X}^2]$.
- (c) Skizzieren Sie die Fehlerwahrscheinlichkeiten aus Gleichung (2) sowie die exakte Symbolfehlerwahrscheinlichkeit aus Beispiel 1 (e) im logarithmischen Maßstab als Funktion des SNRs in dB.

Beispiel 3 — Adaptive Modulation

In Systemen mit stark schwankender Qualität des Empfangssignals (beispielsweise im Mobilfunk) verwendet man *Adaptive Modulation*, d.h. man wechselt zu höheren Konstellationsordnungen für guten bzw. zu niedrigeren für schlechten Empfang.

- (a) Skizzieren Sie die Konstellationsdiagramme für 4-, 16- sowie 64-QAM. Nehmen Sie gleichwahrscheinliche Symbole an und wählen Sie die Symbolabstände d_4 , d_{16} und d_{64} , so, dass $\mathbb{E}[\mathbf{X}^2] = 1$ für alle Konstellationen gilt.

- (b) Für das Mapping der Sendebits auf die Symbole wird ein Gray-Code verwendet. Es soll nun immer die höchstmögliche Konstellation verwendet werden, sodass die Bitfehlerwahrscheinlichkeit P_b bei der Übertragung über einen AWGN Kanal $< 10^{-6}$ ist. Bestimmen und skizzieren Sie jene SNR-Bereiche, in denen nach der angeführten Strategie 4-, 16-, bzw. 64-QAM eingesetzt wird. *Hinweis: Verwenden Sie die Näherungen (1) bzw. (2) aus Beispiel 2 für die Berechnung der Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten.*
- (c) Welche Datenraten werden für die unterschiedlichen Bereiche erzielt, falls eine konstante Symbolrate von 100 Mbaud/s eingesetzt wird?

Beispiel 4 — 8-FSK

Zwei Computer sind über spezielle Datenmodems miteinander verbunden. Mittels 8-FSK wird eine Datenrate von 80 kbaud erreicht, wobei am optimalen Punkt des ρ/T_0 -Diagramms (größter Signalabstand) gearbeitet wird.

- (a) Skizzieren Sie, wenn möglich, das I/Q-Diagramm.
- (b) Geben Sie die spektrale Effizienz des Systems an.
- (c) Skizzieren Sie das Spektrum.

Beispiel 5 — PSK

Im Folgenden betrachten wir ein PSK-Übertragungssystem mit den Symbolen $x \in \mathcal{X} = \{x_0, \dots, x_{M-1}\}$, wobei $x_m = \sqrt{E} e^{j2\pi m/M}$.

- (a) Leiten Sie den für Matched-Filter Detektion gültigen Ausdruck für die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit

$$P_s \approx \operatorname{erfc} \left(\sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \sqrt{T_0 B \frac{C}{N}} \right)$$

her.

Hinweis: Es gilt

$$P_s = P \{ \hat{X} \neq X \} \approx 2P \{ \hat{X} = x_{m+1} | X = x_m \} = 2P_{\text{nn}},$$

wobei die Fehlerwahrscheinlichkeit für einen Nächsten-Nachbar-Fehler P_{nn} unter Vernachlässigung des radialen Beitrags zur Fehlerwahrscheinlichkeit mithilfe der Abb. 2 berechnet werden kann.

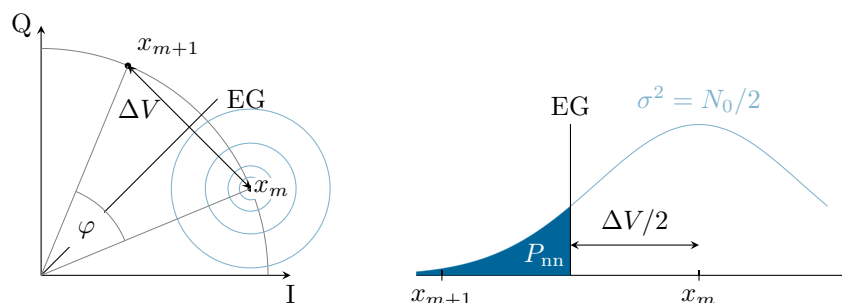


Abbildung 2: Zur Berechnung der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit bei M -PSK. Links: Situation in der I-Q-Ebene. Rechts: Schnitt entlang der Geraden durch die Punkte x_{m+1} und x_m .

- (b) Es werden nun Gray-codierte M -PSK Sendesignale bei einer Kanalbandbreite $B = 600$ kHz für die Übertragung digitaler Information über einen AWGN Kanal verwendet. Für die Bitrate wird $R_b = 2$ MBit/s gefordert, sowie für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit $P_b \leq 10^{-6}$. Bestimmen Sie die Symbolanzahl M und das benötigte CNR für dieses Szenario.
- (c) (*Bonus*) Plotten Sie im logarithmischen Maßstab die in Punkt (a) hergeleitete Näherung sowie eine durch Monte-Carlo-Simulationen berechnete BER als Funktion des SNR γ in dB für die Symbolanzahl $M \in \{2, 4, 8, 16\}$.

Beispiel 6 — Vergleich von 3-PSK und 3-APK

Im Folgenden sind zwei gegebene Modulationsformate miteinander zu vergleichen. Das erste Modulationsformat ist 3-APK, welches mit Symbolen aus dem Alphabet

$$\mathcal{A} = \{0, e^{j\frac{\pi}{3}}, e^{j\frac{5\pi}{3}}\}.$$

arbeitet. Das zweite Modulationsformat ist 3-PSK. Die Auftrittswahrscheinlichkeit der drei Symbole ist bei beiden Modulationsformaten gleichverteilt.

- (a) Skizzieren Sie das I/Q-Diagramm der 3-APK.
- (b) Geben Sie Amplitude und Phase der Symbole für (asymmetrisches) 3-PSK an, wenn beide Modulationsformate mit exakt gleicher Bitfehlerrate operieren sollen. Skizzieren Sie für diesen Fall ein Phasendiagramm, in welchem beide Symbolalphabete eingezeichnet sind.
- (c) Berechnen Sie das Leistungsverhältnis

$$\eta = \frac{P_{\text{APK}}}{P_{\text{PSK}}}$$

und geben Sie dieses in dB an.

Beispiel 7 — BPSK-Restträgermaximum

Ein Kommunikationssystem verwendet zur Datenübertragung von zwei gleichwahrscheinlichen Symbolen eine BPSK-Modulation in Bandpasslage. Das System soll eine Symbolrate von 1 Mbaud bei einer maximalen Bitfehlerwahrscheinlichkeit von $P_b = 10^{-6}$ aufweisen. Am Eingang des idealen Korrelationsempfängers wurde eine Trägeramplitude von 250 mV gemessen. Für die einseitige spektrale Leistungsdichte wurde an der gleichen Stelle ein Wert von 30 pW Hz^{-1} gemessen. Die Eingangsimpedanz des Korrelators beträgt 75Ω .

- (a) Ermitteln Sie den minimalen Winkel zwischen den beiden Zuständen, sodass die angegebene Bitfehlerwahrscheinlichkeit nicht überschritten wird.
- (b) Zeichnen Sie das Phasendiagramm (I/Q-Diagramm).
- (c) Bestimmen Sie für den ermittelten Winkel aus Punkt (a) die Leistung des Restträgers.

Beispiel 8 — Mobilfunkbasisstation

Für die Anbindung einer Mobilfunkbasisstation mit einer Bitrate $R_b = 1$ Gbit/s soll Richtfunk bei $f = 73.5$ GHz eingesetzt werden. Die Sende- und Empfangsstationen verwenden Parabolantennen mit einem Durchmesser $D = 30$ cm, und einer Aperturereffizienz $\eta_{\text{ap}} = 0.85$, $\eta_{\Omega} = 1$. Der Korrelationsempfänger weist eine Rauschzahl von $F = 4$ dB auf. Für die Hintergrundtemperatur der Antennen kann $T_a = 313$ K angenommen werden. Zu untersuchen ist die Übertragung über eine Distanz von 15 km mit $T_0 B = 1.5$. Es wird ein Modulationsformat mit $M = 16$ verwendet. Für eine praktisch fehlerfreie Übertragung ist ein CNR von mindestens 20 dB am Empfänger nötig.

- (a) Skizzieren Sie den Sachverhalt.
- (b) Berechnen Sie die Gewinne der verwendeten Antennen.
- (c) Wie groß ist die Symbolrate?
- (d) Wie groß ist die benötigte Sendeleistung P_s , wenn für Starkregen eine Pegelreserve von 20 dB eingeplant werden soll?
- (e) Zeichnen Sie einen Pegelplan.

Beispiel 9 — Vergleich von 16-QAM und 16-PSK

Für die in Beispiel 8 betrachtete Richtfunkstrecke sollen nun die zwei möglichen Modulationsformate 16-QAM und 16-PSK, untersucht werden. Bearbeiten Sie die folgenden Punkte jeweils für beide Modulationsformate:

- (a) Zeichnen Sie das Konstellationsdiagramm.
- (b) Berechnen Sie die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit P_e und die Symbolfehlerrate R_e .
- (c) Geben Sie die Spitzensendeleistung \hat{P}_s zur in Beispiel 8, Punkt (d) berechneten mittleren Sendeleistung P_s an².

Um Stromkosten zu sparen, wird ein nichtlinearer Leistungsverstärker eingesetzt. Dieser ist wie folgt zu modellieren: Ausgehend von der zuvor berechneten Spitzenleistung \hat{P}_s lautet die Leistungskennlinie des Verstärkers mit nominellem Gewinn G :

$$P_{\text{out}} = \begin{cases} G \cdot P_{\text{in}}, & \text{für } P_{\text{in}} < \frac{5}{9} \hat{P}_s, \\ G \cdot \frac{5}{9} \hat{P}_s, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (d) Zeichnen Sie das Konstellationsdiagramm unter Anwendung dieses Verstärkers.
- (e) Schätzen Sie die entstehenden Symbolfehlerrate aus Geometrieüberlegungen aus dem Konstellationsdiagramm ab.

Beispiel 10 — KP4AO



Um auch technisch weniger gut ausgerüsteten Funkamateuren einen Erfolg mit der Betriebsart Erde-Mond-Erde (EME bzw. Moonbounce) zu ermöglichen, wurde als einmaliges Ereignis vom 16. bis 18.

²Sollten Sie Beispiel 8 nicht gerechnet haben, so wählen Sie $P_s = 16.058$ dBm.

April 2010 über das Radioteleskop Arecibo³ in Puerto Rico unter dem Rufzeichen KP4AO Amateurfunkbetrieb abgewickelt.

Das Teleskop besteht aus einem unbeweglichen parabolischen Reflektor mit einem Durchmesser $D = 305$ m, wobei der Gesamtgewinn dieser Parabolantenne 61 dBi beträgt. Für den Amateurfunkbetrieb wurde für das Senden und den Empfang eine Frequenz von 432.045 MHz verwendet. Die Antennenspeisung erfolgt über einen 457 m langen Hohlleiter mit einer Dämpfung von 0.13 dB/100 m sowie mehrere Hohlleiterdrehverbindungen. Die physikalische Temperatur von Antenne, Verbindern und Hohlleiter liegt im tropischen Klima bei $T_{\text{ph}} = 310$ K. Am Ende der Antennenspeisung befindet sich ein GaAs HEMT Empfangsverstärker mit einer äquivalenten Rauschtemperatur von 35 K. Die gemessene Systemrauschtemperatur des gesamten Empfangssystems inklusive Antenne beträgt $T_{\text{sys in}} = 350$ K. Der Sender von KP4AO verwendete eine Sendeleistung von 350 W.⁴

Einer einfach ausgerüsteten Gegenstation stehen 10 W Sendeleistung zur Verfügung, sowie ein Empfänger mit einer Rauschzahl von $F = 15$ dB und eine Richtantenne mit Gewinn G_2 und Ohmscher Effizienz 1. Zu untersuchen ist die Betriebsart (Modulationsformat) SSB (Single Side Band), welche ein CNR von 20 dB und eine Bandbreite B von 3.2 kHz erfordert.

Weitere Angaben: Abstand Erde-Mond: $d_{\text{EM}} = 384\,400$ km, Monddurchmesser $D_{\text{M}} = 3476$ km, Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 299\,792\,458$ m/s, Boltzmann-Konstante $k_{\text{B}} = 1.380\,648\,8 \cdot 10^{-23}$ J/K, $T_{\text{Ant}} = T_{\text{a}}\eta_{\Omega} + T_{\text{ph}}(1 - \eta_{\Omega})$, die Aperturtemperatur beider Antennen T_{a} ist durch die Oberflächentemperatur des Mondes (210 K) dominiert.

- Berechnen Sie die Ohmsche Effizienz η_{Ω} der Parabolantenne unter der Annahme, dass die Apertureffizienz $\eta_{\text{ap}} = 1$ ist.
- Berechnen Sie die Dämpfung der Hohlleiterdrehverbindungen aus der Systemtemperatur.
Hinweis: Überlegen Sie, ob für aufeinanderfolgende, passive Komponenten die Reihenfolge der Komponenten eine Rolle spielt.
- Berechnen Sie die Signaldämpfung L_{EME} auf der Strecke Erde-Mond-Erde.
Hinweis: Verwenden Sie die Radar-Gleichung. Der Radarquerschnitt des Mondes liegt im Meterwellenbereich bei ca. 10 % seiner physikalischen Querschnittsfläche.
- Welchen Gewinn G_2 muss die Gegenstation aufweisen, um KP4AO empfangen zu können?
- Welchen Gewinn G_2 muss die Gegenstation aufweisen, um von KP4AO empfangen zu werden?

Beispiel 11 — Richtfunkstrecke

Gegeben ist eine 100 Mbit/s Daten-Richtfunkstrecke bei 38 GHz mit gleichartigen Send- und Empfangsantennen und antipodalem PSK über einen AWGN Kanal. Der Antennengewinn beträgt 50 dB und $T_{\text{ant}} = 290$ K. Der Abstand zwischen Sender und Empfänger beträgt 20 km, die Empfängerrauschzahl beträgt $F = 8$ dB. Die Daten werden in 4 Bit, sogenannten Nibbles aufgeteilt und mittels linearem Blockcode übertragen. Die Prüfmatrix dieses Codes ist gegeben durch

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

³der breiten Masse primär aufgrund seines Auftauchens im Finale von GoldenEye bekannt

⁴Alle technischen Angaben zu KP4AO und Arecibo entstammen dem Artikel: J. Taylor, A. Vazquez, and J. Breakall, „Moonbounce from Arecibo Observatory“, QST. ARRL August 2010

- (a) Skizzieren Sie das Kommunikationssystem.
- (b) Wie groß ist die Richtwirkung der Antennen?
- (c) Wie groß ist die wirksame Antennenfläche?
- (d) Bestimmen Sie die minimale Hammingdistanz d_{\min} des Codes.
- (e) Wie viele Fehler können korrigiert werden?
- (f) Welches SNR muss garantiert werden um eine Nibblefehlerwahrscheinlichkeit von $P_{\text{nibble}} = 10^{-6}$ zu erreichen?
- (g) Bestimmen Sie die Sendeleistung für $T_0B = 1$, um die oben genannte Fehlerwahrscheinlichkeit auch bei starkem Regen mit einem zusätzlichen Verlust von 20 dB erreichen zu können.

Beispiel 12 — SDH Richtfunkstrecke

Ein Richtfunksystem für SDH Hierarchiestufe STM-1 (155 Mbit/s) soll zwischen zwei Berggipfeln im Abstand von 60 km bei einer Betriebsfrequenz von 26 GHz mittels graycodierter 64-QAM errichtet werden. Um die Übertragungssicherheit zu erhöhen wird ein (10,8)-Blockcode verwendet. Für eine praktisch fehlerfreie Übertragung ist eine uncodierte Bitfehlerwahrscheinlichkeit $P_b \leq 10^{-6}$ nötig. Die Sende- und Empfangsantennen sind Muschelantennen mit einer effektiven Antennenfläche $a_e = 0.5 \text{ m}^2$. Der Korrelationsempfänger weist eine Rauschzahl 3 dB auf. Für die Hintergrundtemperatur der Antenne kann $T_a = 313 \text{ K}$ angenommen werden und es gilt $T_0B = 1$.

- (a) Skizzieren Sie den Sachverhalt.
- (b) Berechnen Sie die Gewinne der verwendeten Antennen.
- (c) Wie groß ist die benötigte Sendeleistung, wenn für Starkregen eine Pegelreserve von 20 dB eingeplant werden soll?
- (d) Fertigen Sie einen Pegelplan des Übertragungssystems an.
- (e) Welche Sendeleistung wäre nötig, wenn bei sonst gleich bleibenden Parametern statt 64-QAM das Modulationsformat 64-PSK verwendet werden soll? Schätzen Sie das Ergebnis auch mit einer Geometrieüberlegung über das Konstellationsdiagramm ab.

Beispiel 13 — Superheterodynempfänger

Im Folgenden betrachten wir einen Superheterodynempfänger Empfänger für das Funksystem aus Beispiel 12. Der Empfänger wird bei $T = 290 \text{ K}$ betrieben und ist wie folgt aufgebaut:

Nach dem Antennenanschluss folgt ein Bandpassfilter mit einer Bandbreite von 40 MHz und einem Verlust von 0.6 dB. Es folgt ein rauscharmer Verstärker (LNA) mit einem Gewinn von 15 dB und einer äquivalenten Rauschtemperatur von 40 K sowie ein passiver Mischer mit 6 dB Verlust.

In der Zwischenfrequenzlage wird ein 32.3 MHz Bandpassfilter mit 3 dB Verlust von ein ZF-Verstärker mit einer Rauschzahl von 4 dB und einen Gewinn von 15 dB.

- (a) Skizzieren Sie den Empfänger mit allen seinen Komponenten, inklusive der Empfangsantenne und tragen Sie in der Skizze die Rauschzahlen aller Empfängerkomponenten ein.
- (b) Berechnen Sie die Gesamtrauschzahl des Empfängers.
- (c) Berechnen Sie die äquivalente Rauschtemperatur des Empfängers.

- (d) Berechnen sie die Rauschleistung am Ausgang des Empfängers.
- (e) Berechnen Sie die Gesamtrauschzahl des Empfängers, wenn die Dämpfung des Eingangfilter gleich der des ZF-Filters wäre.
- (f) Fertigen Sie einen Pegelplan der gesamten Übertragungsstrecke aus Beispiel 12 inklusive des Empfängers an⁵. Tragen Sie darin auch den Pegelverlauf der Rauschleistung ein, beginnend beim Empfangsfilter.

⁵Sollten Sie Beispiel 12 nicht gemacht haben, beginnen Sie mit dem Pegelplan bei der Empfangsantenne und einer Eingangsleistung von -69.15 dBm