

## 389.138 Telekommunikation – 2014S

## 3. Übung – Lösungen

02.06.2014 – 07.06.2014

Einen Überblick über die in der Übung verwendete Notation finden Sie in TUWEL. Sollten Sie Fehler finden, so wenden Sie sich bitte an tk138@nt.tuwien.ac.at.

**Beispiel 1 — Komplexes Rauschen**

- (a) Unter Ausnützen der Mittelwertfreiheit und der Linearität von  $\mathbb{E}[\cdot]$  erhalten wir für die Varianz

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[N] &= \mathbb{E}[(N - \mu)(N - \mu)^*] \stackrel{\mu=0}{=} \mathbb{E}[NN^*] = \mathbb{E}[(N^{(I)} + jN^{(Q)})(N^{(I)} - jN^{(Q)})] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(N^{(I)}\right)^2 + \left(N^{(Q)}\right)^2\right] \stackrel{(*)}{=} \mathbb{E}\left[\left(N^{(I)}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(N^{(Q)}\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} = \sigma^2, \end{aligned}$$

wobei (\*) aus der Unabhängigkeit von  $N^{(I)}$  und  $N^{(Q)}$  folgt. Damit wird auch nachvollziehbar, warum die Varianz der beiden Komponenten als  $\frac{\sigma^2}{2}$  angegeben wurde.

- (b) Da der Imaginär- und Realteil von  $X$  unabhängig voneinander verrauscht werden, kann auch die gemeinsame bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_{Y|X}(y|x)$  in die von Realteil und Imaginärteil gemäß

$$f_{Y|X}(y|x) = f_{Y^{(I)}, Y^{(Q)}|X^{(I)}, X^{(Q)}}(y^{(I)}, y^{(Q)}|x^{(I)}, x^{(Q)}) = f_{Y^{(I)}|X^{(I)}}(y^{(I)}|x^{(I)})f_{Y^{(Q)}|X^{(Q)}}(y^{(Q)}|x^{(Q)})$$

faktoriert werden. Für die beiden Komponenten gilt wegen der Unabhängigkeit von  $X$  und  $N$ ,  $f_{Y^*|X^*}(y^*|x^*) = f_{N^*}(y^* - x^*)$ . Damit kann die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion vereinfacht werden und man erhält durch Einsetzen in die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Rauschens

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= f_{Y^{(I)}|X^{(I)}}(y^{(I)}|x^{(I)})f_{Y^{(Q)}|X^{(Q)}}(y^{(Q)}|x^{(Q)}) = f_{N^{(I)}}(y^{(I)} - x^{(I)})f_{N^{(Q)}}(y^{(Q)} - x^{(Q)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/2}} \exp\left(-\frac{(y^{(I)} - x^{(I)})^2}{2\sigma^2/2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/2}} \exp\left(-\frac{(y^{(Q)} - x^{(Q)})^2}{2\sigma^2/2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(y^{(I)} - x^{(I)})^2 + (y^{(Q)} - x^{(Q)})^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|y - x|^2}{\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass ein komplexes Symbol  $x$  gesendet wurde, ist  $Y$  gemäß einer zweidimensionalen, kreissymmetrischen Gaussverteilung um das Symbol  $x$  verteilt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte hängt also nur vom Abstand  $|y - x|$  ab.

- (c) Die kreisförmigen Niveaulinien um den Ursprung sind in Abbildung 1a eingezeichnet.
- (d) Die Wahrscheinlichkeit  $P\{N^{(I)} \geq a\}$  können wir sofort über die  $Q$ -Funktion erhalten. Wir wollen hier jedoch hervorheben, dass diese auch dem Integral über das Gebiet  $\mathcal{R}$  aus Abbildung 1a entspricht:

$$P\{N^{(I)} \geq a\} = \int_{\mathcal{R}} f_N(n)dn = \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^{\infty} f_{N^{(I)}}(n^{(I)})f_{N^{(Q)}}(n^{(Q)})dn^{(I)}dn^{(Q)}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{N^{(Q)}}(n^{(Q)}) dn^{(Q)}}_1 \int_a^{\infty} f_{N^{(I)}}(n^{(I)}) dn^{(I)} \\
&= \int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n^{(I)}}{\sigma^2}\right) dn^{(I)} = \mathcal{Q}\left(\frac{a}{\sigma/\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

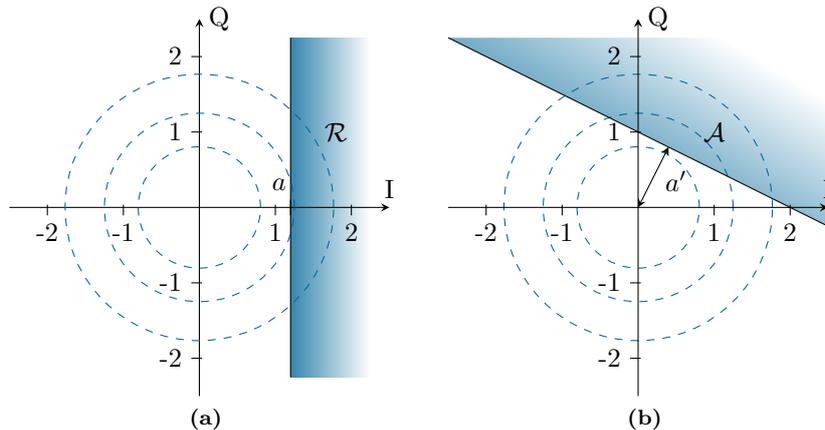


Abbildung 1: I/Q-Diagramme, Beispiel 1

- (e) Wie in Punkt (b) diskutiert hängt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_N(n)$  nur von  $|n|$  ab und ist daher invariant gegenüber einer Drehung um den Ursprung. Somit kann die Wahrscheinlichkeit analog zum vorherigen Punkt berechnet werden indem man statt  $a$  ein  $a'$  einsetzt, welches dem Normalabstand des Randes von  $\mathcal{A}$  zum Ursprung entspricht (vgl. Abbildung 1b). Durch elementare geometrische Überlegungen erhält man

$$a' = 2 \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

und für die Wahrscheinlichkeit

$$P\{N \in \mathcal{A}\} = P\{N^{(I)} \geq a'\} = \mathcal{Q}\left(\frac{a'}{\sigma/\sqrt{2}}\right) = \mathcal{Q}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}\sigma}\right).$$

- (f) Um die Fehlerwahrscheinlichkeit für das gegebene 4-PSK System zu berechnen, verwenden wir zunächst die Symmetrie der Anordnung und vereinfachen die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $P_s$  zu

$$P_s = P\{\hat{X} \neq X\} = \sum_{i=1}^4 P\{\hat{X} \neq x_i | X = x_i\} \underbrace{P\{X = x_i\}}_{\frac{1}{4}} \stackrel{\text{symm.}}{=} P\{\hat{X} \neq x_1 | X = x_1\}.$$

Um die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $P_s$  zu erhalten, reicht es also die Fehlerwahrscheinlichkeit für ein konkretes Symbol, z.B.  $P\{\hat{X} \neq x_1 | X = x_1\}$  zu kennen. Nach dem nearest-neighbour Prinzip wird jedem Quadranten im I/Q-Diagramm je ein Symbol  $x_i$  zugeordnet. In Abbildung 2 ist das Entscheidungsgebiet  $\mathcal{R}_1$  für das Symbol  $x_1$  skizziert. Ein Fehler tritt dann auf, wenn sich das empfangene Symbol außerhalb des Quadranten aufhält, was durch

$$P_s = P\{\hat{X} \neq x_1 | X = x_1\} = P\{Y \notin \mathcal{R}_1 | X = x_1\} = 1 - P\{Y \in \mathcal{R}_1 | X = x_1\}$$

ausgedrückt wird. Es verbleibt die Berechnung von  $P\{Y \in \mathcal{R}_1 | X = x_1\}$

$$\begin{aligned} P\{Y \in \mathcal{R}_1 | X = x_1\} &= P\{x_1 + N \in \mathcal{R}_1\} = P\{x_1^{(I)} + N^{(I)} > 0 \wedge x_1^{(Q)} + N^{(Q)} > 0\} \\ &= P\{N^{(I)} > -x_1^{(I)}\} P\{N^{(Q)} > -x_1^{(Q)}\} = P\{N^{(I)} > -1\}^2 \\ &= Q\left(\frac{-1}{\sigma/\sqrt{2}}\right)^2 = \left(1 - Q\left(\frac{1}{\sigma/\sqrt{2}}\right)\right)^2 \end{aligned}$$

wofür die Unabhängigkeit von Imaginär- und Realteil, das Ergebnis aus Punkt (d) und eine Eigenschaft der  $Q$ -Funktion verwendet wurde. Damit ergibt sich die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit

$$P_s = P\{\hat{X} \neq x_1 | X = x_1\} = 1 - P\{Y \in \mathcal{R}_1 | X = x_1\} = 2Q\left(\frac{1}{\sigma/\sqrt{2}}\right) - Q\left(\frac{1}{\sigma/\sqrt{2}}\right)^2.$$

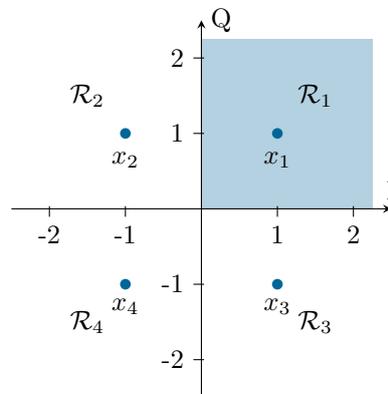


Abbildung 2: Entscheidungsgebiete für Beispiel 1f

### Beispiel 2 — Näherung der Symbolfehlerwahrscheinlichkeit

(a) Für  $d_m = d$  kann man die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $P_s$  zu

$$P_s \approx \sum_{m=1}^M N_m Q\left(\frac{d_m}{\sqrt{2}\sigma}\right) P\{X = x_m\} = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right) \underbrace{\sum_{m=1}^M N_m P\{X = x_m\}}_{\bar{N}} = \bar{N} Q\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

vereinfachen. Dabei haben wir  $\bar{N}$  eingeführt, was als mittlere Anzahl der nächsten Nachbarn interpretiert werden kann.

(b) Das Konstellationsdiagramm ist in Punkt (b) skizziert. Für die Signalenergie kann man unter der Annahme gleichwahrscheinlicher Symbole durch

$$\mathbb{E}[|X|^2] = \sum_{m=1}^4 |x_m|^2 p_X(x_m) = 4 \left( \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right) \frac{1}{4} = \frac{d^2}{2}$$

beschreiben.

(c) Für das SNR  $\gamma$  ergibt sich mit  $\mathbb{E}[|N|^2] = \sigma^2$

$$\gamma = \frac{\mathbb{E}[|X|^2]}{\mathbb{E}[|N|^2]} = \frac{\frac{d^2}{2}}{\sigma^2} = \frac{d^2}{2\sigma^2}.$$

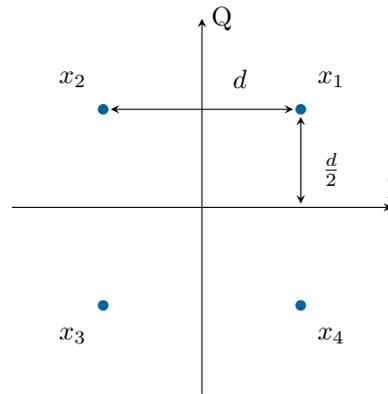


Abbildung 3: Konstellationsdiagramm für 4-QAM aus Beispiel 2

Da für 4-QAM jedes Symbol 2 nächste Nachbarn hat ( $\bar{N} = 2$ ) können wir die Näherung aus Punkt (a) als

$$P'_s = \bar{N} \mathcal{Q}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right) = 2\mathcal{Q}(\sqrt{\gamma}) \quad (1)$$

schreiben. Verwenden wir hingegen das exakte Ergebnis aus Beispiel 1 erhalten wir den Ausdruck

$$P_s = 2\mathcal{Q}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \mathcal{Q}\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 = 2\mathcal{Q}(\sqrt{\gamma}) - \mathcal{Q}(\sqrt{\gamma})^2,$$

welcher sich um den vernachlässigbar kleinen Term  $\mathcal{Q}(\sqrt{\gamma})^2$  von (1) unterscheidet. Die beiden Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten  $P_s(\sqrt{\gamma})$ ,  $P'_s(\sqrt{\gamma})$  sind in Abbildung 4 skizziert.

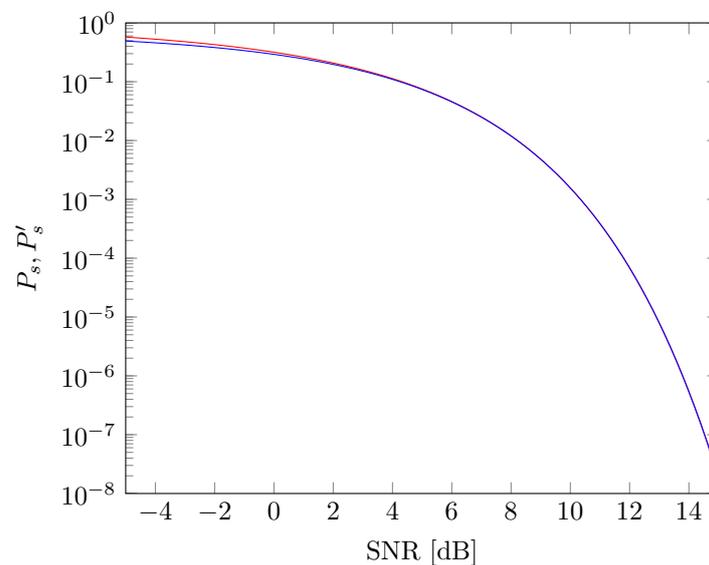


Abbildung 4: Vergleich der Symbolfehlerwahrscheinlichkeiten  $P'_s(\sqrt{\gamma})$  und  $P_s(\sqrt{\gamma})$  für Beispiel 2

**Beispiel 3 — Adaptive Modulation**

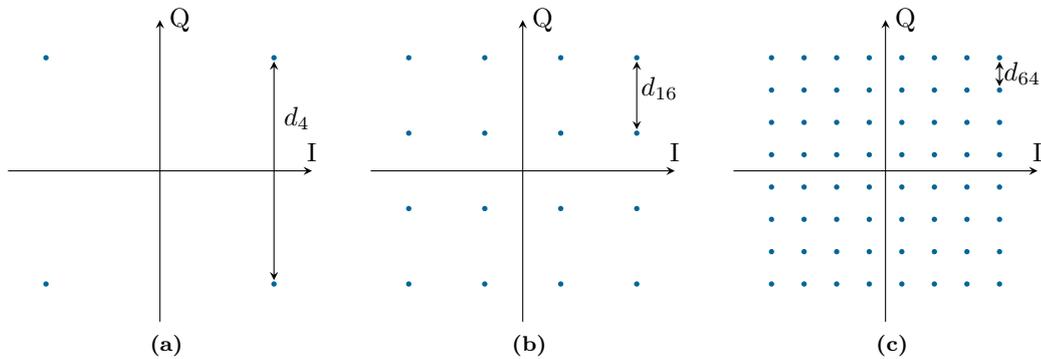
- (a) Die Konstellationsdiagramme sind in Abbildung 5 skizziert. Um die Symbolabstände  $d_4, d_{16}, d_{64}$  zu berechnen, müssen wir die Signalleistung  $\mathbb{E}[|X|^2] = \sum_{m=1}^M P\{X = x_m\} |x_m|^2 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |x_m|^2$  als Funktion des jeweiligen Abstands  $d_i$  ausdrücken:

$$4: \quad \mathbb{E}[|X|^2] = \frac{d_4^2}{4 \cdot 4} [4 \cdot (1^2 + 1^2)] = \frac{d_4^2}{2} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow d_4 = \sqrt{2}$$

$$16: \quad \mathbb{E}[|X|^2] = \frac{d_{16}^2}{16 \cdot 4} [4 \cdot (1^2 + 1^2) + 8 \cdot (1^2 + 3^2) + 4 \cdot (3^2 + 3^2)] = d_{16}^2 \cdot \frac{5}{2} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow d_{16} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$64: \quad \mathbb{E}[|X|^2] = \frac{d_{64}^2}{64 \cdot 4} [4 \cdot (1^2 + 1^2) + 8 \cdot (1^2 + 3^2) + 4 \cdot (3^2 + 3^2) + 8 \cdot (3^2 + 5^2) + 4 \cdot (5^2 + 5^2) + 8 \cdot (1^2 + 7^2) + 8 \cdot (3^2 + 7^2) + 8 \cdot (5^2 + 7^2) + 4 \cdot (7^2 + 7^2)] = d_{64}^2 \frac{21}{2} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow d_{64} = \sqrt{\frac{2}{21}}$$

**Abbildung 5:** Konstellationsdiagramme von 4, 16, 64-QAM

- (b) Bei gleichem SNR verringern sich die Symbolabstände für höhere Symbolanzahlen. Daher steigt die Fehlerwahrscheinlichkeit mit einer größeren Anzahl an Symbolen. Andererseits ermöglichen viele Symbole eine höhere Bitrate und man möchte daher das Modulationsverfahren mit der höchsten Symbolanzahl einsetzen, bei dem die Fehlerwahrscheinlichkeit  $< P_b = 10^{-6}$  ist.

Um die Einsatzbereiche zu bestimmen, ist es daher ausreichend die SNR-Grenzwerte zu berechnen, bei denen die Fehlerwahrscheinlichkeit für  $M$ -QAM gerade  $P_b, i = 10^{-6}$  ist. Unter der Annahme, dass die Symbolleistung wie im ersten Punkte auf 1 normiert ist gilt

$$\text{SNR} = \gamma = \frac{\mathbb{E}[|X|^2]}{\mathbb{E}[|N|^2]} = \frac{1}{\sigma^2} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}. \quad (2)$$

Damit wir die Formel  $P_s \approx \bar{N} Q\left(\frac{d}{\sqrt{2}\sigma}\right)$  verwenden können, müssen wir zusätzlich noch die mittlere Anzahl der nächsten Nachbarn  $\bar{N}$  bestimmen:

$$4: \quad \bar{N}_4 = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 2 = 2$$

$$16: \quad \bar{N}_{16} = \frac{1}{16} [4 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 2] = 3$$

$$64: \quad \bar{N}_{64} = \frac{1}{64} [36 \cdot 4 + 24 \cdot 3 + 4 \cdot 2] = 3.5$$

Wegen der Greycodierung gilt der Zusammenhang  $P_b = \frac{1}{\log_2 M} P_s$  und damit folgt mit Gleichung (2)

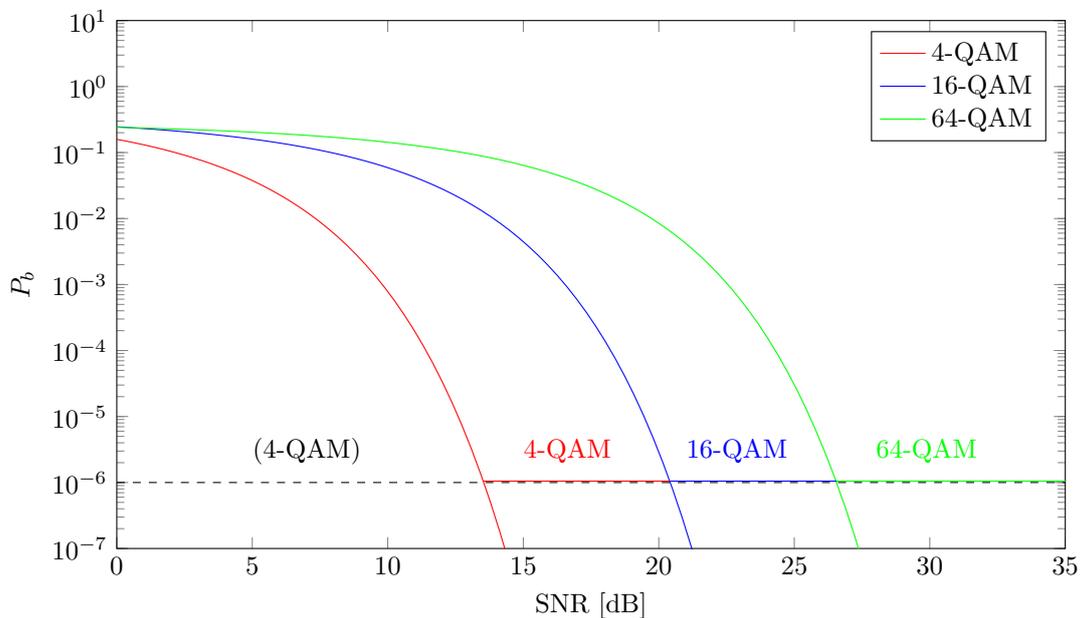
$$P_{b,M} = \frac{P_{s,M}}{\log_2 M} = \frac{\bar{N}_M}{\log_2 M} \mathcal{Q}\left(\frac{d_M}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{\bar{N}_M}{\log_2 M} \mathcal{Q}\left(\frac{d_M}{\sqrt{2}}\sqrt{\gamma}\right)$$

Dies können wir umformen und uns eine Formel

$$\text{SNR}_M^{(\text{dB})} = 10 \log_{10} \left( \frac{2}{d_M^2} \left( \mathcal{Q}^{-1} \left( \frac{\log_2 M}{\bar{N}_M} \right) \right)^2 \right)$$

für die SNR-Grenzwerte aufstellen. Wir erhalten somit  $\text{SNR}_4 = 13.54$  dB,  $\text{SNR}_{16} = 20.42$  dB und  $\text{SNR}_{64} = 26.56$  dB.

Abbildung 6 zeigt die Fehlerwahrscheinlichkeiten als Funktion des SNRs und die zeigt welches Modulationsformat gewählt werden sollte, um die höchste Datenrate zu erreichen bei der  $P_b < 10^{-6}$  ist.



**Abbildung 6:** Vergleich der Fehlerwahrscheinlichkeiten und Auswahl von  $M$ -QAM für Beispiel 3

- (c) Die (brutto) Datenrate  $R_b$  ergibt sich aus der Multiplikation der  $n = \log_2 M$  Bits mit der Symbolrate  $R_s$ . Damit erhalten wir  $R_{b,4} = 200$  Mbit/s,  $R_{b,16} = 400$  Mbit/s und  $R_{b,64} = 600$  Mbit/s.

#### Beispiel 4 — 8-FSK

- (a) Das I/Q-Diagramm, in der die komplexe Einhüllende  $x(t) = A(t)e^{j\varphi(t)} = x^{(I)}(t) + jx^{(Q)}(t)$  dargestellt wird, liefert bei einer  $M$ -FSK keine Aussage, da die Frequenz des Signals  $x(t)$  die Information beinhaltet.
- (b) Aus der Angabe ist zu entnehmen  $M = 8$ ,  $N = \log_2(M) = 3$ ,  $2\Delta f T_s = n = 1.43$ ,  $\frac{1}{T_s} = R_s = 80$  kbaud. Die Bandbreite des Systems ist (vgl. Abbildung 7)  $B = (M - 1)\Delta f + 2R_s$ . Weiters wird angenommen, dass alle Symbole die gleiche Auftreffswahrscheinlichkeit besitzen und somit

$H = \log_2(M)$  gilt. Damit ergibt sich die Effizienz zu

$$\eta_s = \frac{R_s H}{B} = \frac{N}{BT_s} = \frac{N}{(M-1)\frac{n}{2} + 2} = 0.42827 \text{ bits/s/Hz.}$$

(c) Das Spektrum ist in Abbildung 7 skizziert.

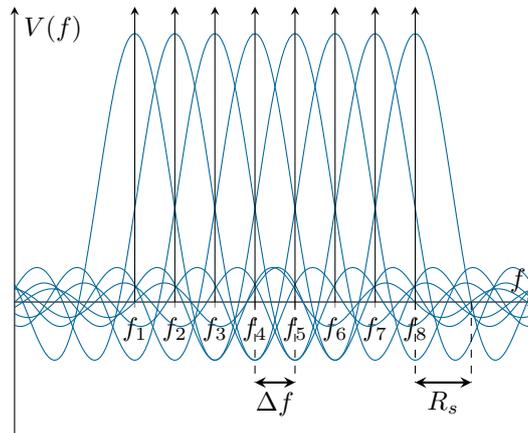


Abbildung 7: Skizze des Spektrums, Beispiel 4

### Beispiel 5 — PSK

Im Gegensatz zu 4-QAM, weisen für  $M$ -PSK die Entscheidungsregionen

$$\mathcal{R}_m = \left\{ x \in \mathbb{C} \mid \angle x \in \left[ \pi \frac{m-1}{M}, \pi \frac{m+1}{M} \right) \right\} \quad (3)$$

für  $M > 4$  keine orthogonalen Entscheidungsgrenzen auf, womit sich die Fehlerwahrscheinlichkeit

$$P_s = P\{\hat{X} \neq X\} \stackrel{\text{symm.}}{=} P\{\hat{X} \neq x_m | X = x_m\} = P\{Y \notin \mathcal{R}_m | X = x_m\} = 1 - P\{Y \in \mathcal{R}_m | X = x_m\}$$

nicht mehr geschlossen berechnen lässt und wir daher auf eine Näherung zurückgreifen müssen.

(a) Zunächst erläutern wir, warum  $P_s \approx 2P_{\text{nn}}$ . Dabei Vernachlässigen wir alle Fehlerereignisse, die nicht die nächsten Nachbarn betreffen:

$$\begin{aligned} P_s &= P\{\hat{X} \neq X\} = \sum_{x \in \mathcal{X}} P\{\hat{X} \neq X | X = x\} \overbrace{p_X(x)}^{1/M} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} P\left\{ \overbrace{\hat{X} \neq x_m}^{\bigvee_{k \neq m} \hat{X} = x_k} \mid X = x_m \right\} \\ &\approx \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \underbrace{P\{\hat{X} = x_{m-1 \bmod M} \vee \hat{X} = x_{m+1 \bmod M} | X = x_m\}}_{=2P\{\hat{X} = x_{m+1} | X = x_m\} = 2P_{\text{nn}}, \text{unabhängig von } m} = 2P_{\text{nn}}. \end{aligned}$$

Ausgehend von dem allgemeinen Resultat für einen AWGN Kanal

$$P_{\text{nn}} = \mathcal{Q}\left(\frac{\Delta V}{2\sigma}\right) \quad (4)$$

kann nun der gesuchte Zusammenhang hergeleitet werden. Aus der Angabe folgen die Zusammenhänge  $\varphi = 2\pi/M$  und  $\sigma^2 = N_0/2$ . Der Abstand aller Symbole vom Ursprung ist  $\sqrt{E}$ , wodurch

sich der Abstand der Symbole  $\Delta V$  gemäß

$$\Delta V = 2\sqrt{E} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2\sqrt{E} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

ergibt. Der Zusammenhang zum CNR ergibt sich über die Signalenergie  $E$ , die Symboldauer  $T_0$  und die Bandbreite  $B$  nach

$$\text{CNR} = \frac{C}{N} = \frac{\frac{E}{T_0}}{N_0 B} = \frac{E}{N_0 T_0 B}.$$

Durch Einsetzen der gefundenen Gleichungen in Gleichung (4) folgt

$$P_s \approx 2P_{\text{nn}} = 2Q\left(\frac{2\sqrt{E} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)}{2\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = 2Q\left(\sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \sqrt{\frac{T_0 B N_0 \frac{C}{N}}{\frac{N_0}{2}}}\right) = \text{erfc}\left(\sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \sqrt{T_0 B \frac{C}{N}}\right) \quad (5)$$

und damit der gesuchte Zusammenhang.

- (b) Da die Bandbreite  $B = 600 \text{ kHz}$  kleiner als die geforderte Bitrate  $R_b = 2 \text{ Mbit s}^{-1}$  ist müssen  $M$ -wertige Symbole mit  $M > 2$  übertragen werden. Es ergibt sich die Bitanzahl  $n$  gemäß

$$n = \left\lceil \frac{R_b}{B} \right\rceil = 4$$

und damit die Anzahl der Symbole  $M = 2^n = 16$ . Durch die Gray-codierung kommt hinzu, dass sich jedes Symbol von seinen Nachbarsymbolen nur um ein Bit unterscheidet. Tritt also ein Symbolfehler auf, so ist dies genau ein einzelner Bitfehler. Da ein Symbol aber  $\log_2(M)$  Bits enthält ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $P_b$  gemäß

$$P_b = \frac{P_s}{\log_2(M)}$$

kleiner als die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $P_s$ . Mit der Näherungsformel in Gleichung (5) folgt

$$P_b = \frac{1}{\log_2(M)} \text{erfc}\left(\sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \sqrt{T_0 B \frac{C}{N}}\right)$$

und daraus das gesuchte CNR gemäß

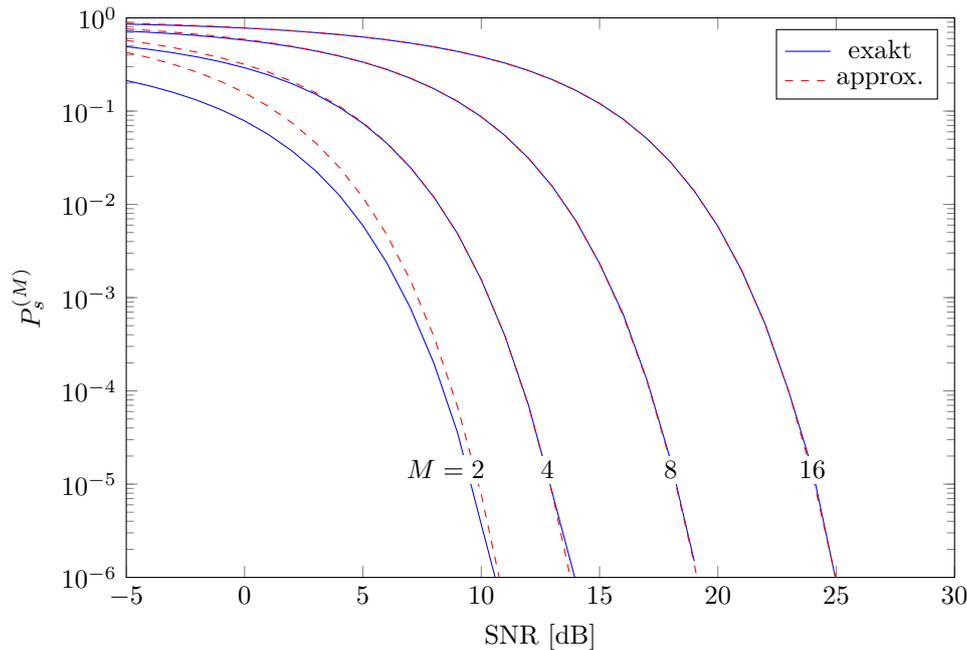
$$\text{CNR} = \frac{C}{N} = \frac{1}{T_0 B} \left( \frac{\text{erfc}^{-1}(P_b \log_2(M))}{\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)} \right)^2 = 279.3578 \hat{=} 24.46 \text{ dB}.$$

- (c) Siehe Abbildung 8.

### Beispiel 6 — Vergleich von 3-PSK und 3-APK

- (a) Das I/Q-Diagramm für die 3-APK-Modulation mit dem Alphabet  $\mathcal{A}$  ist in Abbildung 9 dargestellt.
- (b) Aus dem bestehenden Alphabet  $\mathcal{A}$  kann ein 3-PSK-Alphabet durch eine horizontale Verschiebung (entlang der I-Richtung) nach links erzeugt werden. Zum Beispiel wird eine 3-PSK-Modulation mit

$$\mathcal{B} = \{e^{j\pi}, e^{j\frac{2\pi}{3}}, e^{j\frac{4\pi}{3}}\}. \quad (6)$$



**Abbildung 8:** Symbolfehlerwahrscheinlichkeit für  $M$ -PSK. Die „exakten“ Werte wurden durch Monte-Carlo Integration der zweidimensionalen, bedingten Dichten über die Entscheidungssektoren  $\mathcal{R}_m$  bestimmt.

erreicht. Da die Abstände zwischen den Symbolen unverändert bleiben, ist auch die Bitfehlerwahrscheinlichkeit exakt gleich wie bei der 3-APK-Modulation. Beide Modulationsformate sind in Abbildung 9 dargestellt.

- (c) Die modulierten Symbole sind sinusförmige Signale mit der Modulationsfrequenz  $f$  sowie einer Phasenverschiebung  $\varphi$  und einer Amplitude  $A$  gemäß dem jeweiligen Symbol im Phasendiagramm. Die mittlere Leistung eines solchen Symbols ist der quadrierte Abstand vom Ursprung. Für gleichwahrscheinliche Symbole gilt für die beiden Modulationsformate

$$P_{\text{APK}} = \frac{1}{3}(0 + 1^2 + 1^2) = \frac{2}{3} \quad \text{und}$$

$$P_{\text{PSK}} = \frac{1}{3}(1^2 + 1^2 + 1^2) = 1.$$

Damit ist

$$\eta = \frac{P_{\text{APK}}}{P_{\text{PSK}}} = \frac{2}{3} \hat{=} -1.76 \text{ dB}. \quad (7)$$

### Beispiel 7 — BPSK-Restträgermaximum

- (a) Gemäß [1, Abschnitt 11.3.2] lautet die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für die Restträger BPSK

$$P_b = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( m \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) \right]$$

mit  $m = \sin(\Delta\theta/2) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \rho)}$ , der Trägersymbolenergie  $E = E_0 = E_1$  und der einseitigen spektralen Rauschleistungsdichte  $N_0$ . Man erhält diese Gleichung in dem man die Trägersymbolenergie  $E$  in der Bitfehlerwahrscheinlichkeit für herkömmlich PRK  $P_b = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) \right]$  durch  $m^2 E$  ersetzt.

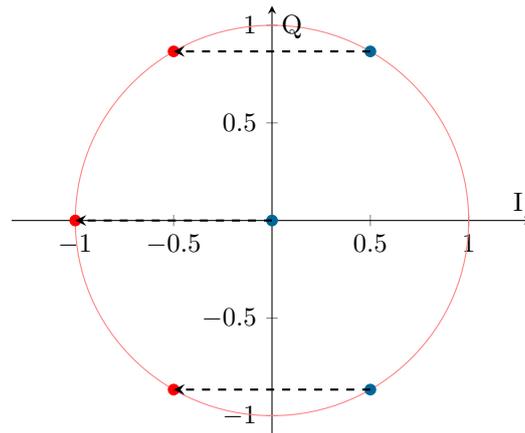


Abbildung 9: I/Q-Diagramm, Beispiel 6

Um den minimal erlaubten Winkel  $\Delta\theta_{\min}$  für eine vorgegebene Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $P_b = 10^{-6}$  zu erhalten, muss man in die obige Gleichung einsetzen

$$10^{-6} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( m_{\min} \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) \right] = \mathcal{Q} \left( m_{\min} \sqrt{2} \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right)$$

und nach  $\Delta\theta$  auflösen. Nach kurzen Umformen erhält man

$$\Delta\theta_{\min} = 2 \arcsin \left( \frac{\mathcal{Q}^{-1}(10^{-6})}{\sqrt{2 \frac{E}{N_0}}} \right).$$

Das Nomogramm der  $\mathcal{Q}$ -Funktion liefert  $\mathcal{Q}^{-1}(10^{-6}) = 4.7534$ . Die Trägersymbolenergie  $E = PT_0$  erhält man aus der Trägerleistung  $P = \frac{A^2}{2Z} = \frac{(25 \text{ mV})^2}{2 \cdot 75 \Omega}$  und der Symboldauer  $T_0 = \frac{1}{R_s} = \frac{1}{10^6 \text{ baud}}$ . Die einseitige spektrale Rauschleistungsdichte  $N_0 = 30 \text{ pW Hz}^{-1}$  ist direkt aus der Angabe zu entnehmen. Somit ergibt sich ein minimal erlaubter Winkel durch Einsetzen der Größen von

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{\min} &= 2 \arcsin \left( \frac{4.7534}{\sqrt{2 \frac{(25 \text{ mV})^2}{2 \cdot 75 \Omega} \frac{1}{10^6 \text{ baud}}}{30 \text{ pW Hz}^{-1}}} \right) \\ &= 2 \arcsin(0.9018942385) \\ &= 2.24827 \text{ rad} = 128.82^\circ. \end{aligned}$$

(b) Siehe Abbildung 10.

(c) Das Verhältnis zwischen Trägersymbolleistung und Restträgerleistung lautet  $1 - m^2$ , daher beträgt die Leistung des Restträgers

$$P_{\text{rest}} = P(1 - m_{\min}^2) = \frac{A^2}{2} \frac{1}{Z} \left( 1 - \sin^2 \left( \frac{\Delta\theta_{\min}}{2} \right) \right) = 77.74 \mu\text{W} \quad (8)$$

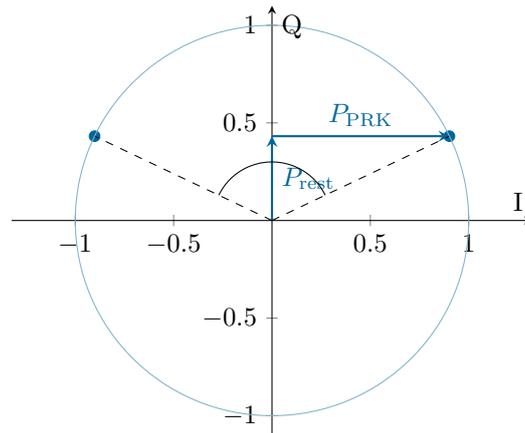


Abbildung 10: I/Q-Diagramm, Beispiel 7

und die Leistung der informationstragenden Komponente lautet

$$P_{\text{PRK}} = P m_{\text{min}}^2 = \frac{A^2}{2} \frac{1}{Z} \sin^2 \left( \frac{\Delta\theta_{\text{min}}}{2} \right) = 338.92 \mu\text{W}. \quad (9)$$

### Beispiel 8 — Mobilfunkbasisstation

(a) Der Aufbau des Kommunikationssystems ist in Abbildung 11 skizziert.

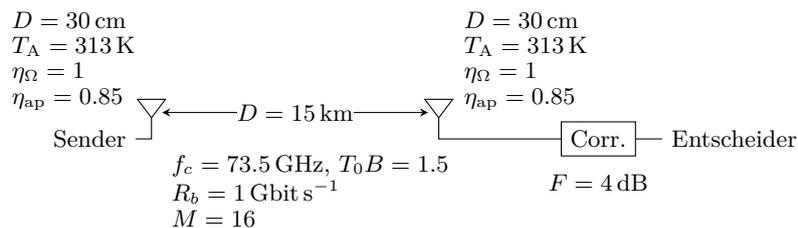


Abbildung 11: Skizze des Kommunikationssystems, Beispiel 8

(b) Der Gewinn der Sende- und Empfangsantenne ist auf Grund der Angabe ident und aus der effektiven Antennenfläche  $a_e = \eta_{\Omega} \eta_{\text{ap}} A_{\text{ph}}$  und der Wellenlänge  $\lambda = c_0 / f_c$  berechenbar.

$$G = G_{\text{TX}} = G_{\text{RX}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} a_e = \frac{4\pi}{(c_0/f_c)^2} \eta_{\Omega} \eta_{\text{ap}} A_{\text{ph}} = \frac{4\pi}{(c_0/f_c)^2} \eta_{\Omega} \eta_{\text{ap}} \left( \frac{D}{2} \right)^2 \pi = 45.383 \cdot 10^3 \hat{=} 46.569 \text{ dBi}$$

(c) Die Symbolrate  $R_s$  berechnet sich aus der Bitrate  $R_b = 1 \text{ Gbit s}^{-1}$  und der Anzahl an Bits für ein Symbol  $N = \log_2 M = \log_2 16 = 4$

$$R_s = \frac{R_b}{N} = 0.25 \cdot 10^9 \text{ Symbols/s} = 250 \text{ Mbaud}$$

(d) Für die gegebene Funkstrecke gilt der Zusammenhang zwischen Sendeleistung  $P_{\text{TX}}$  und Empfangsleistung  $P_{\text{RX}}$

$$P_{\text{RX}}^{(\text{dBm})} = P_{\text{TX}}^{(\text{dBm})} + G_{\text{TX}}^{(\text{dB})} - \text{FSPL}^{(\text{dB})} - R^{(\text{dB})} + G_{\text{RX}}^{(\text{dB})}$$

mit der Berücksichtigung der Freiraumdämpfung FSPL und der zusätzlichen Reserve von  $R^{(\text{dB})} =$

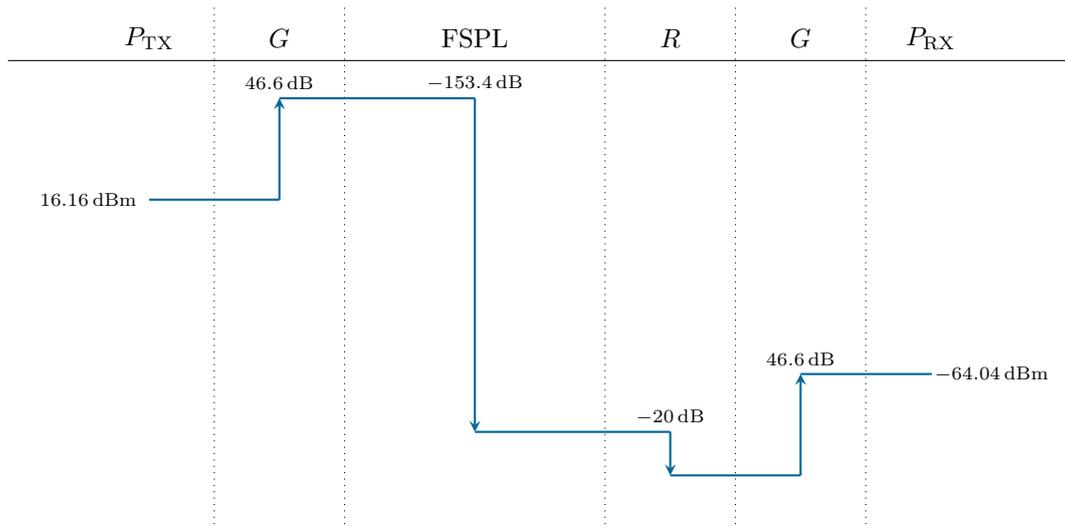


Abbildung 12: Pegelplan zu Beispiel 8.

20 dB für starken Regen. Die Freiraumdämpfung berechnet sich durch

$$\text{FSPL}^{(\text{dB})} = 10 \log_{10} \left( \left( \frac{4\pi D}{\lambda} \right)^2 \right) = 20 \log_{10} \left( \frac{4\pi D}{\lambda} \right) \approx 153.395 \text{ dB}.$$

Die Empfangsleistung ist durch das verlangte Carrier-to-Noise-Ratio  $\text{CNR}^{(\text{dB})} = 20 \text{ dBm}$  gemäß und der Rauschleistung  $N^{(\text{dBm})}$  ermittelbar.

$$P_{RX} = \text{CNR}^{(\text{dB})} + N^{(\text{dBm})}$$

Die Rauschleistung berechnet sich aus der Antennentemperatur  $T_{\text{ant}} = T_A = 313 \text{ K}$  (Annahme:  $\eta_{\Omega} = 1$ ) und der Rauschzahl des Korrelationsempfänger  $F = 4 \text{ dB}$ . Die Rauschzahl wird in eine äquivalente Rauschtemperatur umgerechnet und die Bandbreite ermittelt

$$f = 10^{\frac{F}{10}} = 1 + \frac{T_e}{290} \Rightarrow T_e = (10^{\frac{F}{10}} - 1)290 \text{ K} = 438.447 \text{ K},$$

$$BT_0 = 1.5 \Rightarrow B = \frac{1.5}{T_0} = 1.5R_s = 375 \text{ MHz},$$

und somit erhält man die Rauschleistung

$$N = k_B(T_e + T_{\text{ant}})B = k_B(438.447 \text{ K} + 313 \text{ K})375 \text{ MHz} = 3.8906 \cdot 10^{-12} \text{ W} \hat{=} -84.100 \text{ dBm}.$$

Durch Einsetzen und Umformen des Zusammenhangs erhält man die benötigte Sendeleistung

$$\begin{aligned} P_{TX} &= \text{CNR}^{(\text{dB})} + N^{(\text{dBm})} - 2G^{(\text{dB})} + \text{FSPL}^{(\text{dB})} + R^{(\text{dB})} \\ &= 20 \text{ dB} - 84.100 \text{ dBm} - 2 \cdot 46.569 \text{ dBi} + 153.395 \text{ dB} + 20 \text{ dB} \\ &= 16.157 \text{ dBm} \end{aligned}$$

(e) Der Pegelplan ist in Abbildung 12 dargestellt.

**Beispiel 9 — Vergleich von 16-QAM und 16-PSK**

- (a) Die Abbildungen 13 und 14 zeigen die Konstellationsdiagramme für die beiden Modulationen 16-QAM und 16-PSK.

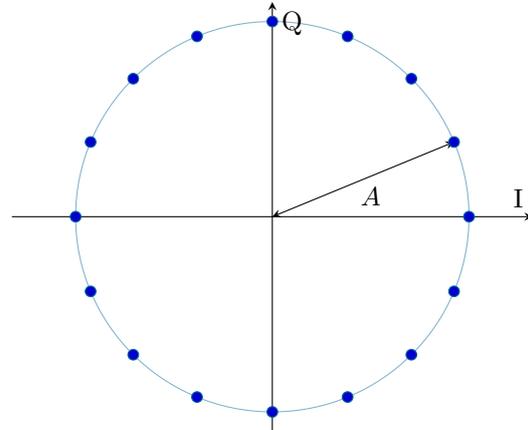
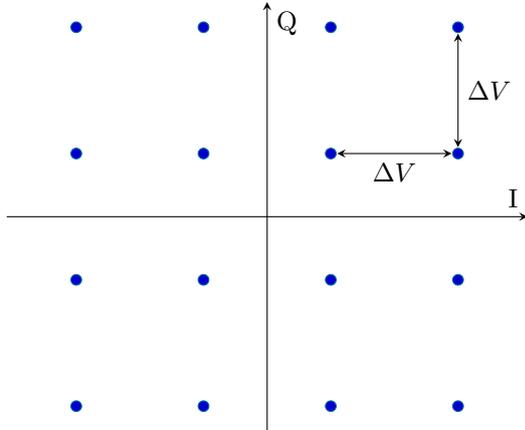


Abbildung 13: I/Q-Diagramm 16-QAM, Beispiel 9

Abbildung 14: I/Q-Diagramm 16-PSK, Beispiel 9

- (b) Mit den geforderten Parametern  $\text{CNR}^{(\text{dB})} = 20 \text{ dB}$ ,  $M = 16$  und  $T_0 B = 1.5$  ergibt sich mit [1, Eq. (11.45)] die Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $P_e$  und die Symbolfehlerrate  $R_e$  für die 16-QAM-Modulation

$$P_e = 4 \frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M}} \mathcal{Q} \left( \sqrt{\frac{3T_0 B}{M - 1} \text{CNR}} \right) \approx 6.4807 \cdot 10^{-8} \quad \text{und}$$

$$R_e = P_e R_s \approx 16.2017 \text{ s}^{-1}.$$

Bei gleichen Parametern gilt für 16-PSK mit [1, Eq. (11.39(b))]

$$P_e = 2 \mathcal{Q} \left( \sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{M} \right) \sqrt{T_0 B} \sqrt{\text{CNR}} \right) \approx 7.2733 \cdot 10^{-4} \quad \text{und} \quad (10)$$

$$R_e = P_e R_s \approx 1.8183 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

- (c) Die mittlere Leistung  $P_s$  berechnet sich aus den Leistungen der einzelnen Symbole, welche mit der Auftrittswahrscheinlichkeit gewichtet sind. Jedes Symbol mit sinusförmigem Trägersignal besitzt eine Leistung, die dem quadrierten Abstand vom Ursprung entspricht. Für die Symbolleistung zählt also nur der Abstand vom Ursprung des Diagramms, nicht aber dessen Phasenlage. Dadurch ergeben sich Symmetrien, womit mehrere Symbole die selbe Leistung besitzen. Für 16-QAM folgt daher mit dem Abstand  $\Delta V$  aus dem Phasendiagramm

$$P_s = \frac{1}{16} \left( 4 \left( \sqrt{2} \frac{\Delta V}{2} \right)^2 + 8 \left( \left( \frac{\Delta V}{2} \right)^2 + \left( \frac{3\Delta V}{2} \right)^2 \right) + 4 \left( \sqrt{2} \frac{3\Delta V}{2} \right)^2 \right) = \dots = \frac{5}{2} \Delta V^2$$

$$\hat{P}_s = \left( \sqrt{2} \frac{3\Delta V}{2} \right)^2 = \frac{9}{2} \Delta V^2$$

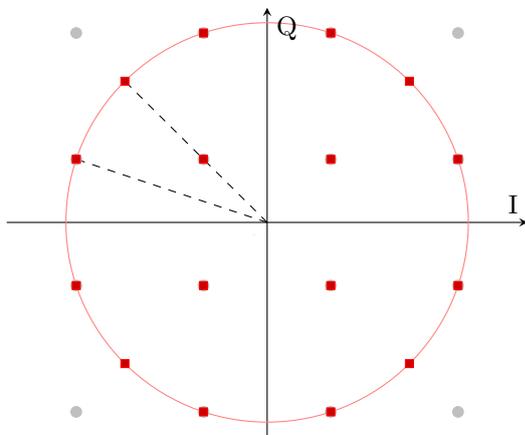
und damit

$$\frac{\hat{P}_s}{P_s} = \frac{9}{5} \Rightarrow \hat{P}_s = \frac{9}{5} P_s \approx 0.0726 \text{ W}.$$

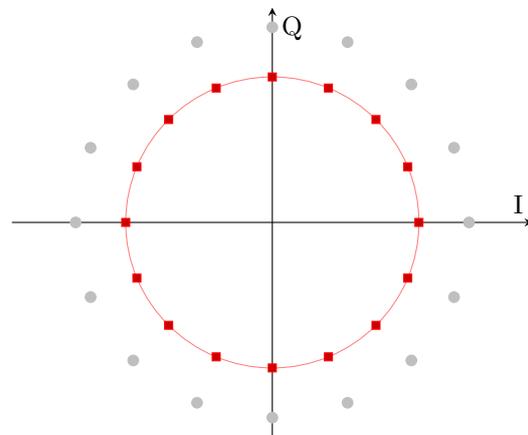
Bei 16-PSK hingegen haben alle Symbole den selben Abstand zum Ursprung und daher auch die selbe Signalleistung. Die mittlere Leistung  $P_s$  und die Spitzenleistung  $\hat{P}_s$  sind daher gleich und es gilt

$$\hat{P}_s = P_s \approx 0.0403 \text{ W}.$$

- (d) Die beiden Phasendiagramme nach Anwendung des Verstärkers sind in Abbildungen 15 und 16 dargestellt. Die ursprünglichen Symbolpunkte sind hellgrau dargestellt und die neuen Symbole sind als rote Quadrate eingezeichnet. Für 16-QAM ergibt sich, dass die äußersten 4 Symbole nicht mehr korrekt verstärkt werden und daher weiter innen zum Liegen kommen. Die Symbole mit der nächstkleineren Leistung werden aber bereits korrekt verstärkt. Es ergibt sich, dass nun 12 der 16 Symbole auf einer Kreislinie liegen. Bei 16-PSK hat die nichtlineare Verstärkung auf alle Symbole eine Auswirkung. Diese werden weiter nach innen geschoben und haben nun einen geringeren Abstand zueinander.



**Abbildung 15:** I/Q-Diagramm 16-QAM mit nichtlinearer Verstärkung, Beispiel 9



**Abbildung 16:** I/Q-Diagramm 16-PSK mit nichtlinearer Verstärkung, Beispiel 9

- (e) Aus Abbildung 15 der 16-QAM ist ersichtlich, dass das neue Konstellationsdiagramm einer M-PSK-Modulation ähnelt. Der geringste Abstand zweier Symbole trägt am meisten zur Symbolfehlerwahrscheinlichkeit bei und wird daher zum Abschätzen verwendet. In diesem Fall ist es der Winkel zwischen den beiden strichlierten Linien gemäß

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{\frac{\Delta V}{2}}{\frac{3\Delta V}{2}}\right) = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

Die neue Symbolfehlerwahrscheinlichkeit  $P'_e$  ist daher

$$P'_e = 2Q\left(\sqrt{2} \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \sqrt{T_0 B} \sqrt{\text{CNR}}\right) \approx 6.9079 \cdot 10^{-5}.$$

Bei 16-PSK nimmt, wie in Abbildung 16 dargestellt, die Sendeleistung insgesamt mit dem Faktor  $\frac{5}{9}$  ab. Da die Symbolleistung abnimmt, reduziert sich auch das CNR um diesen Faktor. Die Winkel zueinander bleiben unverändert und es kann wieder Gleichung (10) mit  $\text{CNR}' = \frac{5}{9}\text{CNR}$  verwendet werden. Dies liefert

$$P'_e = 2Q\left(\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \sqrt{T_0 B} \sqrt{\text{CNR}'}\right) \approx 0.0118.$$

**Beispiel 10 — KP4AO**

- (a) Die Ohmsche Effizienz  $\eta_\Omega$  der Parabolantenne berechnet sich bei gegebenem Gewinn von  $G = 61$  dBi und angenommener Apertur-effizienz  $\eta_{ap} = 1$  zu

$$\left. \begin{aligned} a_e &= G \frac{\lambda^2}{4\pi} = 48\,236.25 \text{ m}^2 \\ A_{ph} &= \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi = 73\,061.66 \text{ m}^2 \end{aligned} \right\} \eta_\Omega = \frac{\eta}{\eta_{ap}} = \eta = \frac{a_e}{A_{ph}} = \frac{48\,236.25 \text{ m}^2}{73\,061.66 \text{ m}^2} = 0.660$$

- (b) Zunächst halten wir fest, dass für zwei aufeinanderfolgende, passive Komponenten mit Gewinnen  $G_1, G_2 < 1$  die Gesamtrauschzahl

$$f = f_1 + \frac{f_2 - 1}{G_1} = f_2 + \frac{f_1 - 1}{G_2} = \frac{1}{G_1 G_2}$$

unabhängig von der Reihenfolge der Komponenten ist.

Das gesamte Rauschtemperatur des Empfangssystems besteht aus 3 Komponenten:

1. Hintergrundtemperatur der Antenne

$$T_{Ant} = T_a \eta_\Omega + T_{ph}(1 - \eta_\Omega) = 210 \text{ K} \cdot 0.66 + 310 \text{ K}(1 - 0.66) = 244 \text{ K}$$

2. äquivalente Rauschtemperatur GaAs HEMT Empfangsverstärker  $T_{Amp} = 35 \text{ K}$

3. äquivalente Rauschtemperatur des passives Teilsystems  $T_{passiv}$  bestehend aus Hohlleiter und -verbindungen. Die äquivalente Rauschtemperatur passiver Systeme ist laut [1, Eq. (12.37)]

$$T_{passiv} = \left( \frac{1}{G_{passiv}} - 1 \right) T_{ph}$$

mit der physikalischen Temperatur  $T_{ph}$  und der Verstärkung  $G_{passiv} < 1$  des Systems. Die Verstärkung des verlustbehafteten Systems kann genauer beschrieben werden durch

$$G_{passiv}^{(dB)} = G_{Hohlleiter}^{(dB)} + G_{Verbindungen}^{(dB)}$$

mit der Verstärkung der Hohlleiter  $G_{Hohlleiter} = -0.13 \text{ dB}/100\text{m} \cdot 457 \text{ m} = -0.5941 \text{ dB}$  und der gesuchten Verstärkung der Hohlleiterverbindungen  $G_{Verbindungen}^{(dB)}$ .

Somit ist die äquivalente Rauschtemperatur des Empfängers am Eingang gemäß [1, Chap. 12.3.2)]

$$T_e = T_{passiv} + \frac{T_{Amp}}{G_{passiv}}$$

und die gesamte Rauschtemperatur des Empfangssystems inklusive Antenne

$$T_{sys} = T_{Ant} + T_e = T_{Ant} + T_{passiv} + \frac{T_{Amp}}{G_{passiv}} = T_{Ant} + \left( \frac{1}{G_{passiv}} - 1 \right) T_{ph} + \frac{T_{Amp}}{G_{passiv}} = 350 \text{ K.}$$

Auflösen nach  $G_{passiv}$  liefert

$$G_{passiv} = \frac{T_{Amp} + T_{ph}}{T_{sys} - T_{Ant} + T_{ph}} = 0.82933$$

Mit diesem Zwischenergebnis kann jetzt die Verstärkung der Hohlleiterverbindungen

$$G_{\text{Verbindungen}} = \frac{G_{\text{passiv}}}{G_{\text{Hohlleiter}}} \Rightarrow G_{\text{Verbindungen}}^{(\text{dB})} = G_{\text{passiv}}^{(\text{dB})} - G_{\text{Hohlleiter}}^{(\text{dB})} = -0.2185 \text{ dB}$$

berechnet und man erhält die geforderte Dämpfung der Hohlleiterverbindungen

$$L_{\text{Verbindungen}} = \frac{1}{G_{\text{Verbindungen}}} \Rightarrow L_{\text{Verbindungen}}^{(\text{dB})} = -G_{\text{Verbindungen}}^{(\text{dB})} = 0.2185 \text{ dB}$$

- (c) Die Signaldämpfung  $L_{\text{EME}}$  ist als ein Teil der Radar-Gleichung für die Anwendung Sender- und Empfangsgerät KP4AO und Reflektionsobjekt Mond interpretierbar.

Mit der Empfangsleistung  $P_r$ , der Sendeleistung  $P_s$  der zugehörigen Antennengewinne  $G_s = G_r$ , der Entfernung zwischen KP4AO (Erde) und dem reflektierenden Objekt (Mond)  $d_{\text{EM}}$ , dem Radarquerschnitt des Mondes  $\sigma = 0.1\sigma_{\text{ph}}$  und der Wellenlänge des Signals  $\lambda = \frac{c_0}{f}$  lautet die Radar-Gleichung

$$P_r = P_s \frac{G_s G_r \sigma \lambda^2}{(4\pi)^3 d_{\text{EM}}^4} = P_s G_s G_r \underbrace{\frac{\sigma \lambda^2}{(4\pi)^3 d_{\text{EM}}^4}}_{G_{\text{EME}}}$$

Der Term  $G_{\text{EME}}$  entspricht der negative Streckendämpfung Erde-Mond-Erde und somit ergibt sich mit den Werten aus der Angabe und der physikalischen Querschnittsfläche des reflektierenden Objekts  $\sigma_{\text{ph}} = \left(\frac{D_{\text{M}}}{2}\right)^2 \pi$  die geforderte Signaldämpfung

$$L_{\text{EME}} = \frac{1}{G_{\text{EME}}} = \frac{(4\pi)^3 d_{\text{EM}}^4}{\sigma \lambda^2} = 9.4842 \cdot 10^{25} \hat{=} 259.77 \text{ dB}.$$

- (d) Für die Funkstrecke gilt der Zusammenhang zwischen Sendeleistung  $P_1$  des KP4AO und Empfangsleistung  $P_2$  einer Gegenstation, die das vom Mond reflektierte KP4AO-Signal empfängt

$$P_2^{(\text{dBm})} = P_1^{(\text{dBm})} + G_1^{(\text{dB})} - L_{\text{EME}}^{(\text{dB})} + G_2^{(\text{dB})}.$$

Aus der Angabe und dem Unterpunkt c) ist  $P_1 = 350 \text{ W} \hat{=} 55.441 \text{ dBm}$ ,  $G_1 = 61 \text{ dBi}$  und  $L_{\text{EME}} = 259.77 \text{ dB}$  bekannt. Weiters gilt für die empfangene Leistung

$$P_2^{(\text{dBm})} = \text{CNR}^{(\text{dB})} + N^{(\text{dBm})}.$$

Die Betriebsart der Empfangsstation (Gegenstation) fordert ein  $\text{CNR}^{(\text{dB})} = 20 \text{ dB}$  und die Rauschleistung ist durch die Antennentemperatur  $T_{\text{Ant}2} = 210 \text{ K}$ , der Rauschzahl des Empfängers  $F_2 = 15 \text{ dB}$  und der verwendeten Bandbreite  $B = 3.2 \text{ kHz}$  bestimmbar.

$$N^{(\text{dBm})} = 10 \log_{10} \left( \frac{k_B \left[ T_a + 290 \left( 10^{\frac{F_2^{(\text{dB})}}{10}} - 1 \right) \right] B}{1 \text{ mW}} \right) = -123.962 \text{ dBm}$$

Der geforderte Antennengewinn  $G_2$  ergibt sich aus Umformen des obigen Zusammenhangs und einsetzen der berechneten Größen zu

$$G_2^{(\text{dB})} = \text{CNR}^{(\text{dB})} + N^{(\text{dBm})} - P_1^{(\text{dBm})} - G_1^{(\text{dB})} + L_{\text{EME}}^{(\text{dB})}$$

$$\begin{aligned}
 &= 20 \text{ dB} - 123.962 \text{ dBm} - 55.441 \text{ dBm} + 61 \text{ dBi} + 259.77 \text{ dB} \\
 &= 39.367 \text{ dBi}.
 \end{aligned}$$

- (e) Es handelt sich hier um die reziproke Anordnung im Vergleich zum Unterpunkt d), daher folgt die Berechnung auf analogen Weg. Für die Funkstrecke gilt der Zusammenhang zwischen Sendeleistung  $P_2$  der Gegenstation und Empfangsleistung  $P_1$  des KP4AOs

$$P_1^{(\text{dBm})} = P_2^{(\text{dBm})} + G_2^{(\text{dB})} - L_{\text{EME}}^{(\text{dB})} + G_1^{(\text{dB})}.$$

Aus der Angabe und dem Unterpunkten c) ist  $P_2 = 10 \text{ W} \hat{=} 40 \text{ dBm}$ ,  $G_1 = 61 \text{ dBi}$ ,  $L_{\text{EME}} = 259.77 \text{ dB}$  bekannt. Weiters gilt für die empfangene Leistung

$$P_1^{(\text{dBm})} = \text{CNR}^{(\text{dB})} + N^{(\text{dBm})}$$

Die Betriebsart der Empfangsstation (KP4AO) fordert ein  $\text{CNR}^{(\text{dB})} = 20 \text{ dB}$  und die Rauschleistung ist durch die äquivalente Rauschtemperatur des Empfangsystems inklusive Antenne  $T_{\text{sys in1}} = T_{\text{Ant1}} + T_{e1} = 350 \text{ K}$  ermittelbar.

$$N^{(\text{dBm})} = 10 \log_{10} \left( \frac{k_B T_{\text{system}} B}{1 \text{ mW}} \right) = -138.107 \text{ dBm}$$

Der geforderte Antennengewinn  $G_2$  ergibt sich aus Umformen des obigen Zusammenhangs und einsetzen der Größen zu

$$\begin{aligned}
 G_2^{(\text{dB})} &= \text{CNR}^{(\text{dB})} + N^{(\text{dBm})} - P_2^{(\text{dBm})} + L_{\text{EME}}^{(\text{dB})} - G_1^{(\text{dB})} \\
 &= 20 \text{ dB} - 40 \text{ dBm} + 259.77 \text{ dB} + 61 \text{ dBi} - 138.107 \text{ dBm} \\
 &= 40.663 \text{ dBi}.
 \end{aligned}$$

### Beispiel 11 — Richtfunkstrecke

- (a) Das Kommunikationssystem ist in Abbildung 17 skizziert.

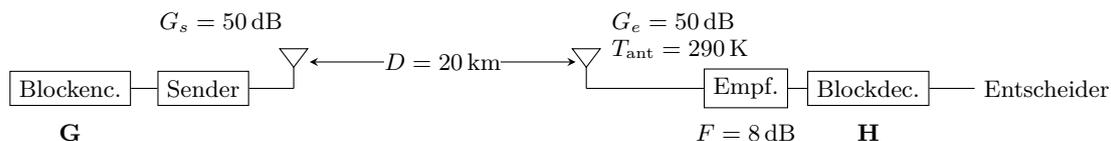


Abbildung 17: Skizze der Richtfunkstrecke aus Beispiel 11

- (b) Die Richtwirkung der Antenne ergibt sich zu  $D = \frac{G}{\eta_\Omega} = 50 \text{ dB}$ , wobei mangels genauerer Angabe  $\eta_\Omega = 1$  und damit die Antenne als verlustlos angenommen wurde.
- (c) Die wirksame Antennenfläche ist  $a_e = \frac{G\lambda^2}{4\pi} = \frac{Gc_0^2}{4\pi f^2} \approx 0.495 \text{ m}^2$ .
- (d) Aus der Prüfmatrix der Form  $\mathbf{H} = (\mathbf{P}^T|\mathbf{I})$  kann die Generatormatrix  $\mathbf{G} = (\mathbf{I}|\mathbf{P})$  bestimmt werden. Mit dieser lassen sich alle  $2^4 = 16$  Codewörter angeben. Da es sich um einen linearen Code handelt, entspricht die minimale Hammingdistanz  $d_{\min}$  dem minimalen Codegewicht  $w_{\min} = 4$  des Codes.

- (e) Es kann mindestens  $t = \lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$  beliebig angeordneter Fehler korrigiert werden.
- (f) Die Nibblefehlerwahrscheinlichkeit also die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Datenbit nach der Korrektur durch den Blockcode nicht richtig dekodiert werden kann entspricht der Wahrscheinlichkeit

$$P_{\text{nib}} = P\{N \geq 2\} = 1 - (P\{N = 0\} + P\{N = 1\}) = 1 - (1 - P_b)^8 - \binom{8}{1} P_b (1 - P_b)^7 \stackrel{!}{=} 10^{-6}. \quad (11)$$

Gleichung (11) liefert als einzige positive Lösung  $P_b = 1.8905 \cdot 10^{-4}$ . Aus der Gleichung für antipodales Passband-PSK

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\operatorname{SNR}}) = Q(\sqrt{2} \sqrt{\operatorname{SNR}}).$$

Daraus errechnet sich das zu garantierende SNR mit dem zuvor berechneten Wert für  $P_b$  zu

$$\operatorname{SNR} = \frac{1}{2} Q^{-1}(P_b)^2 \approx 6.3187 = 8.0063 \text{ dB}$$

- (g) Für die Berechnung der erforderlichen Sendeleistung  $P_s$  wird müssen wir zuerst die Empfangsleistung  $P_e$  und das Rauschen  $N$  bestimmen. Da die Rauschtemperatur der Antenne  $T_{\text{ant}} = 290 \text{ K}$  genau gleich der Bezugstemperatur der Rauschzahlen (290 K) ist, können wir einen vereinfachten Zusammenhang verwenden. Es liegt in diesem Fall genau die Bezugstemperatur am Eingang des Verstärkers und daher gilt für das Rauschen

$$N^{(\text{dBm})} = F^{(\text{dB})} + (k_B B T_{\text{ant}})^{(\text{dBm})} = -85.9752 \text{ dBm},$$

wobei wir für  $B = 100 \text{ MHz}$  eingesetzt haben, was wegen  $B T_0 = 1$  der Symbolrate  $R_s$  entspricht. Für die Empfangsleistung  $P_e$  findet man die Gleichung

$$P_e^{(\text{dBm})} = P_s^{(\text{dBm})} + G^{(\text{dB})} - \text{FSPL}^{(\text{dB})} + G^{(\text{dB})}.$$

Für den Regen planen wir ein um 20 dB erhöhtes  $\operatorname{SNR}^{(\text{dB})}$  also  $\operatorname{SNR}'^{(\text{dB})} = \operatorname{SNR}^{(\text{dB})} + 20 \text{ dB}$  ein. Zusammen mit der Beziehung  $\operatorname{SNR}^{(\text{dB})} = P_e^{(\text{dBm})} - N^{(\text{dBm})}$  folgt

$$P_s^{(\text{dBm})} = \operatorname{SNR}^{(\text{dB})} + 20^{(\text{dB})} - 2 G^{(\text{dB})} + \text{FSPL}^{(\text{dB})} - N^{(\text{dBm})} = -7.9048^{(\text{dBm})}.$$

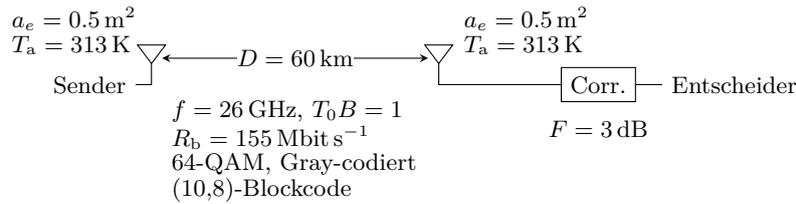
Dafür wurde für die Freiraumverluste die bekannte Formel

$$\text{FSPL}^{(\text{dB})} = 20 \log_{10} \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right) \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{c_0}{f}$$

verwendet.

### Beispiel 12 — SDH Richtfunkstrecke

- (a) Der Aufbau der SDH Richtfunkstrecke ist in Abbildung 18 skizziert.
- (b) Der Gewinn  $G$  der Antennen berechnet sich aus der effektiven Antennenfläche  $a_e$  mit der Wel-



**Abbildung 18:** Skizze der Richtfunkstrecke, Beispiel 12

Wellenlänge  $\lambda = c_0/f$  gemäß

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} a_e = \frac{4\pi}{\left(\frac{c_0}{f}\right)^2} a_e \approx 4.7259 \cdot 10^4 \hat{=} 46.74 \text{ dB}.$$

- (c) Die uncodierte Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $P_b$  soll  $10^{-6}$  nicht überschreiten. Aus [1, Eq. (11.45)] gemäß

$$P_b = \frac{4}{\log_2(M)} \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{3T_0 B}{M-1} \text{CNR}}\right)$$

folgt daher

$$\text{CNR} = \frac{M-1}{3T_0 B} \left( Q^{-1}\left( P_b \frac{\log_2(M)}{4} \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M}-1} \right) \right)^2 \approx 452.7685 \hat{=} 26.56 \text{ dB}.$$

Die notwendige Bandbreite ergibt sich über die Coderate des  $(n,k)$ -Blockcodes und der Anzahl  $m = 6$  bit/Symbol um die  $M = 2^m = 64$  Symbole darstellen zu können. Für jeweils  $k$  Nutzbits werden  $n$  Bits übertragen. Gleichmaßen erhöht sich die codierte Bitrate  $R_{b,c}$  am Kanal gemäß

$$R_{b,c} = \frac{n}{k} R_b$$

und die Symbolrate  $R_s$  ist

$$R_s = \frac{R_{b,c}}{6 \text{ bit/Symbol}}.$$

Daraus folgt die Bandbreite  $B$  aus der Symbolrate

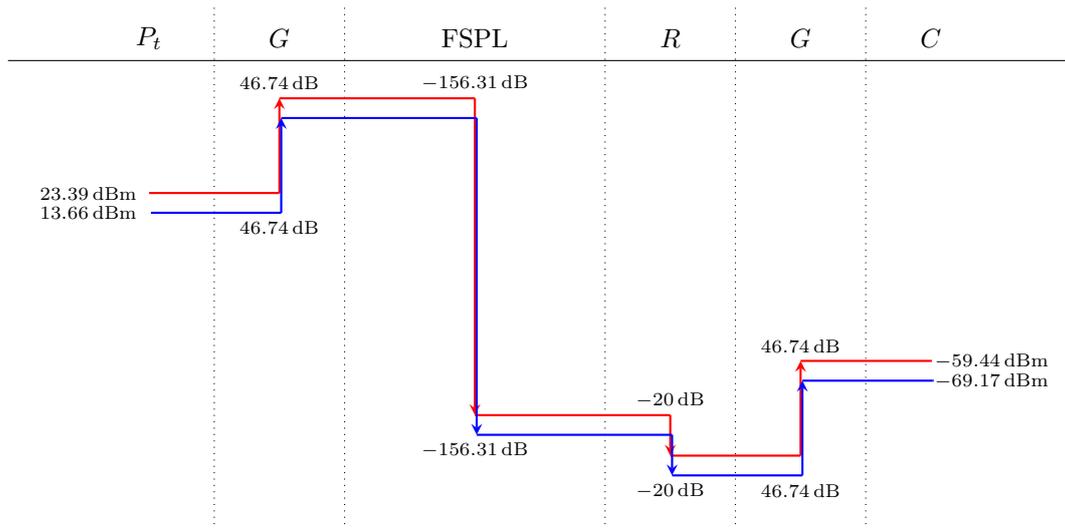
$$B = \frac{R_s}{1 \text{ Symbol}} \approx 32.2917 \text{ MHz}.$$

Die Eingangsräuschktemperatur setzt sich aus der Antennentemperatur und der auf die Empfangsantenne bezogenen Rauschzahl  $F$  des Detektors. Es gilt

$$T_{\text{sys}}^{(\text{in})} = T_a + T_e = T_a + 290 \text{ K} \left( 10^{\frac{F}{10}} - 1 \right),$$

wodurch sich die Rauschleistung an der Antenne gemäß

$$N = T_{\text{sys}}^{(\text{in})} k_B B \approx 2.6823 \cdot 10^{-13} \text{ W} \hat{=} -95.73 \text{ dBm}$$



**Abbildung 19:** Pegelplan zu Beispiel 12. Er zeigt die Leistungsverhältnisse entlang der Richtfunkstrecke für 64-QAM (blau, Punkt (c)) und für 64-PSK (rot, Punkt (e)).

ergibt. Unter Berücksichtigung der Freiraumausbreitung über die Distanz  $D = 60$  km nach

$$\text{FSPL}^{(\text{dB})} = 10 \log_{10} \left( \left( \frac{4\pi D}{\lambda} \right)^2 \right) \text{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{4\pi D}{\lambda} \right) \text{dB} \approx 156.31 \text{ dB},$$

der Reserve  $R^{(\text{dB})} = 20$  dB und der Carrier-to-Noise-Ratio gemäß

$$\text{CNR} = \frac{C}{N} \Leftrightarrow \text{CNR}^{(\text{dB})} = C^{(\text{dBm})} - N^{(\text{dBm})}$$

folgt der Zusammenhang zwischen Sendeleistung  $P_s$  und Empfangsleistung  $P_e$

$$C^{(\text{dBm})} = P_e^{(\text{dBm})} = P_s^{(\text{dBm})} + G^{(\text{dB})} - \text{FSPL}^{(\text{dB})} + G^{(\text{dB})} - R^{(\text{dB})}.$$

Die Sendeleistung ist daher

$$P_s^{(\text{dBm})} = N^{(\text{dBm})} + \text{CNR}^{(\text{dB})} - 2G^{(\text{dB})} + \text{FSPL}^{(\text{dB})} + R^{(\text{dB})} \approx 13.66 \text{ dB} \hat{=} 23.2506 \text{ mW}. \quad (12)$$

(d) Der Pegelplan für die Ergebnisse aus Punkt (c) ist in Abbildung 19 (blau) dargestellt.

(e) Bei gleichen Parametern gilt für 64-PSK (gestrichelte Größen) mit [1, Eq. (11.39(b))]

$$P_b = \frac{2}{\log_2(M)} \mathcal{Q} \left( \sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{M} \right) \sqrt{T_0 B} \sqrt{\text{CNR}'} \right)$$

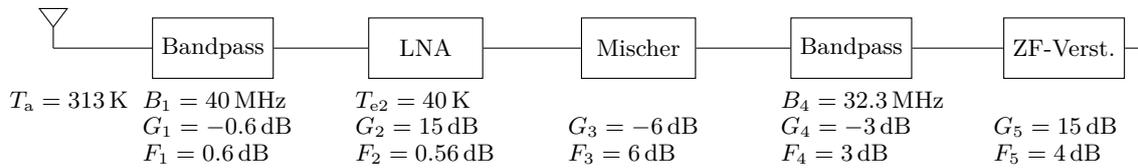
und daraus folgt

$$\text{CNR}' = \frac{1}{2T_0 B} \left( \frac{1}{\sin \left( \frac{\pi}{M} \right)} \mathcal{Q}^{-1} \left( \frac{P_b \log_2(M)}{2} \right) \right)^2 \approx 4.2548 \cdot 10^3 \hat{=} 36.29 \text{ dB}.$$

Mit Gleichung (12) ergibt sich analog  $P_s^{(\text{dBm})} \approx 23.39 \text{ dBm} \hat{=} 218.4944 \text{ mW}$ . Das Ergebnis ist als Pegelplan in Abbildung 19 (rot) gezeigt.

**Beispiel 13 — Superheterodynempfänger**

- (a) Die Übertragungskette ist in Abbildung 20 dargestellt.

**Abbildung 20:** Skizze des Superheterodynempfängers, Beispiel 13

- (b) Für verlustbehaftete, passive Elemente gilt für die Rauschzahl
- $F_i = -G_i$
- . Beim Superheterodynempfänger sind dies die beiden Bandpässe (
- $F_1, F_4$
- ) und der Mischer (
- $F_3$
- ). Die Rauschzahl
- $F_2$
- des LNA ergibt sich über die äquivalente Rauschtemperatur
- $T_{e2}$
- gemäß

$$F_2 = 10 \log_{10}(f_2) \text{ dB} = 10 \log_{10} \left( 1 + \frac{T_{e2}}{290} \right) \text{ dB} \approx 0.56 \text{ dB}.$$

Mit  $f_i = 10^{F_i/10}$  bzw.  $g_i = 10^{G_i/10}$  ergibt sich die Gesamttrauschzahl des Empfängers über die Formel von Friis [1, Gleichung (12.49)]

$$f = f_1 + \frac{f_2 - 1}{g_1} + \dots + \frac{f_5 - 1}{g_1 g_2 g_3 g_4} \quad (13)$$

zu  $F = 10 \log_{10}(f) \text{ dB} \approx 3.0 \text{ dB}$ . Gemäß Gleichung (13) wirkt sich die erste Komponente in der Kette am Stärksten auf die Gesamttrauschzahl aus, da die Rauschzahlen aller anderen Komponenten um die Verstärkungen der davor liegenden Komponenten abgeschwächt werden.

- (c) Die äquivalente Rauschtemperatur des Empfänger folgt aus der Gesamttrauschzahl

$$T_e = (f - 1)290 \text{ K} \approx 288.45 \text{ K}.$$

- (d) Nachdem das Rauschen der Komponenten an den Eingang rückgerechnet wurde (
- $T_e$
- ), kann die Rauschleistungsdichte am Eingang

$$N_{0,\text{in}} = k_B(T_a + T_e)$$

mit der Gesamtverstärkung  $g = \prod_{i=1}^5 g_i$  in die Rauschleistungsdichte am Ausgang

$$N_{0,\text{out}} = g N_{0,\text{in}}$$

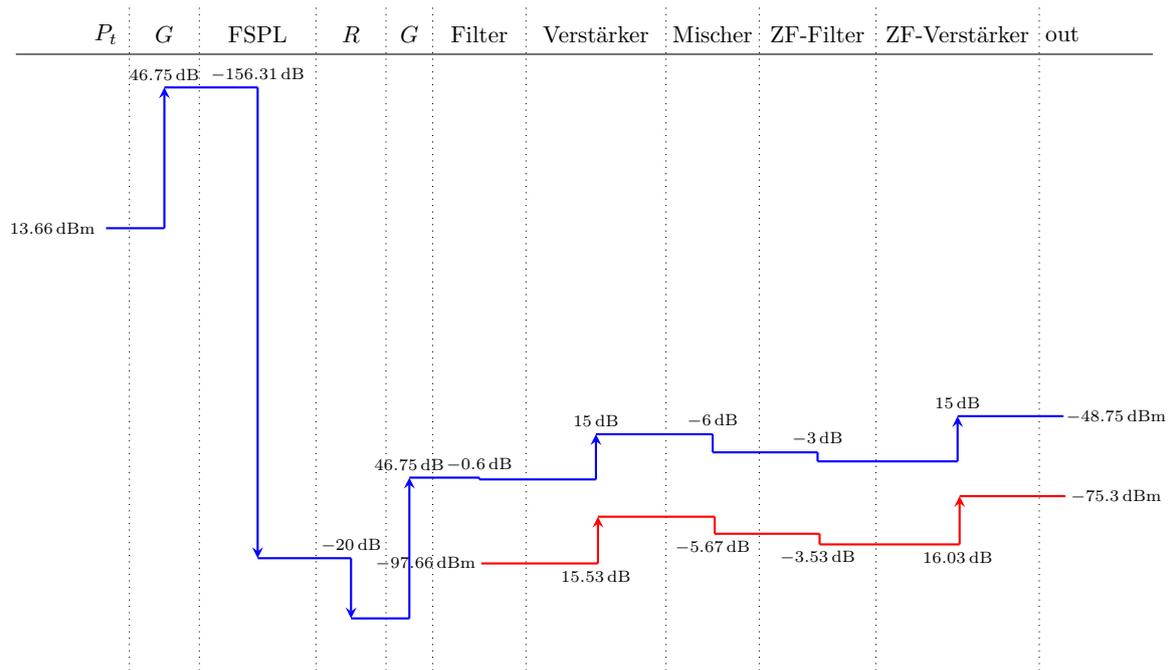
übergeführt werden. Die Rauschleistung ergibt sich nun aus Multiplikation mit der Bandbreite

$$N_{0,\text{out}} = N_{0,\text{out}} B_{\text{out}} \approx 2.94 \cdot 10^{-8} \text{ mW} \hat{=} -75.31 \text{ dBm}.$$

- (e) Analog zu Punkt (b) erhält man mit
- $f_1 \rightarrow f_4$
- bzw.
- $g_1 \rightarrow g_4$

$$F \approx 5.4 \text{ dB}.$$

- (f) Der Pegelplan ist in Abbildung 21 dargestellt.



**Abbildung 21:** Pegelplan zu Beispiel 13. Der Signalpegel (blau) deckt sich bis zum Filter mit jenem aus Beispiel 12. Ab dem Filter ist auch der Rauschpegel (rot) eingezeichnet, wobei sich die Rauschleistungsdichten in Stufe  $i$  über  $N_{0,i} = g_i(N_{0,i-1} + T_i k_B)$  berechnen. Der Rauschpegel folgt dann zu  $N_i = N_{0,i} B_i$  wobei  $B_i$  die Bandbreite in der jeweiligen Stufe bezeichnet. Der Abstand zwischen den beiden Pegeln ist das CNR in der jeweiligen Stufe. Am Ausgang der Kette tritt genau das gewünschte CNR aus Beispiel 13 (c) auf. Die in Punkt (b) berechnete Gesamttrauschzahl  $F$  (welche auch mit der Angabe aus Beispiel 13 übereinstimmt) fasst somit das Rauschverhalten der gesamten Empfängerstruktur zusammen. Die einzig relevante Bandbreite ist jene am Systemausgang.

## Literatur

- [1] Ian Glover and Peter Mitchell Grant. *Digital Communications*. Pearson Education Canada, 3rd edition, 2009.